

Domaines d'utilité:

- Construction d'arbre de probabilité pour une variable **aléatoire** discrète.
- Approche des dénombrements (combinaison, arrangement, permutation)

Objectifs:

- Connaître le langage des probabilités et les propriétés de calcul des probabilités : événement contraire, incompatibilité, indépendance, réunion.
- Savoir calculer une probabilité conditionnelle
- Être capable de construire un arbre de probabilités

Probabilités

I - Langage de probabilités.....	2
II - Probabilités sur un univers fini Ω : définition et calcul.....	3
II.1 Définition.....	3
II.2 Calcul.....	3
II.3 Exemples: Activités:.....	3
III - Événements contraires.....	4
III.1 Définition et notation.....	4
III.2 Probabilité de l'événement contraire.....	4
III.3 Événement(s) contraire(s) particuliers.....	4
IV - Intersection de 2 événements A et B, noté $A \cap B$, lue « A inter B » ou « A et B ».....	6
IV.1 Définition et notation.....	6
IV.2 Événements incompatibles ou disjoints.....	6
IV.3 Événements indépendants :.....	6
V - Réunion de 2 événements A et B, noté $A \cup B$, lue « A union B » ou « A ou B ».....	7
V.1 Définition et notation.....	7
V.2 Probabilité de $A \cup B$	7
V.3 Formule générale du calcul de $P(A \cup B)$	7
V.4 Cas particuliers où les 2 événements sont disjoints.....	7
VI - Événement contraire à l'intersection $A \cap B$ et la réunion $A \cup B$	8
VI.1 Événement contraire à l'intersection $A \cap B$	8
VI.2 Événement contraire à la réunion $A \cup B$	8
VII - Probabilité conditionnelle, notée $P_B(A)$ ou $P(A/B)$, lue $P(A)$ sachant B.....	9
VII.1 Approche par la représentation graphique.....	9
VII.2 Approche mathématique: définition et notation.....	9
VIII - Exercices d'applications: construction d'arbre(s) de probabilités.....	10
VIII.1 Règles générales sur les arbres de probabilités:.....	10
VIII.2 La classe et l'option.....	11
VIII.3 La cage et les oiseaux.....	12
VIII.4 Rendement d'une chaîne de production.....	13

Pré-requis:

- Notions basiques sur quelques expériences aléatoires (Pile ou face, lancé de dés, ...)

I - Langage de probabilités

Représentation sous forme d'ensemble	Langage de probabilité	Exemple
	Une expérience aléatoire (ou épreuve aléatoire) est une expérience où les résultats dépendent du hasard .	Le lancé d'un dé, roulette (russe !), pile ou face, carte, loto, ...
	<p>L'univers est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire. Il est lu oméga, noté Ω.</p> <p>Un événement est une partie de Ω. Il est noté A, B, \dots</p> <p>Un événement est constitué de zéro, un(e) ou plusieurs éventualité de Ω. Lorsque qu'un événement est constitué d'une seule éventualité, on parle aussi d'événement élémentaire.</p> <p>Une éventualité (ou possibilité ou issue) est un seul élément de Ω.</p>	$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $\text{Card}(\Omega) =$ $A = \{2; 4; 6\}$ $B = \{1; 3; 4\}$ $\text{Card}(B) =$ $C = \{6\}$. $\text{Card}(C) =$ $D = \{3\}$. $\text{Card}(D) =$ $G = \{\}$. G est vide . $E = \{1\}$ ou $F = \{5\}$
	Un événement certain est la partie égale à l'univers Ω .	$A = \Omega$
	Un événement impossible est l'ensemble vide .	$A = \emptyset$. $\text{Card}(\emptyset) =$
	Le cardinal d'un événement A est le nombre d'éléments qu'il contient. Il est noté $\text{Card}(A)$.	$A = \{2; 4; 5; 6\}$ $\text{Card}(A) = 4$
	<p>Un événement A est inclus dans un événement B lorsque tous les éléments de A sont présents dans l'événement B.</p> <p>L'inclusion se lit « A est inclus dans B »</p> <p>L'inclusion est notée $A \subset B$.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$ </div> <p><u>Activités:</u></p> <p>Dessiner sur le dessin de gauche deux événements A et B inclus dans l'univers Ω et tel que $A \subset B$.</p>	<p><u>Activités:</u></p> $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $B = \{2; 4; 5; 6\}$ $A = \{2; 5\}$ A est-t-il inclus dans B ?

Activités: Pour chaque expérience aléatoire suivante, donner les cardinaux de chaque événement.

Soit l'**expérience aléatoire** suivante: On choisit au hasard une **personne** dans la classe (+ formateur).

A : « La personne est un homme. »

B : « La personne est une femme. (infâme!!!) »

C : « La personne porte des lunettes. »

$\text{Card}(\Omega) =$ $\text{Card}(A) =$ $\text{Card}(B) =$ $\text{Card}(C) =$

Soit l'**expérience aléatoire** suivante: On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 20 compris.

A : « Le nombre est un multiple de 3 (**sans** compter $3 = 3 \times 1$). »

B : « Le nombre est **strictement** inférieur à 12. »

C : « Le nombre est **supérieur** ou égal à 8. »

D : « Le nombre est **premier** (en considérant 1 comme premier). »

$\text{Card}(\Omega) =$ $\text{Card}(A) =$ $\text{Card}(B) =$ $\text{Card}(C) =$ $\text{Card}(D) =$

Rappel(s) : un nombre **premier** est un nombre qui **n'est divisible que** par 1 et par lui-même.

Exemple(s) : 15 n'est pas premier car il est divisible par 3 et 5. (car dans la table de multiplication).

7 est **premier** car il apparaît **uniquement** dans la table de multiplication de 1 et de 7.

II - Probabilités sur un univers fini Ω : définition et calcul

II.1 Définition

Soit une expérience aléatoire et son univers Ω associé. Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω . On appelle probabilité définie sur Ω , toute application P qui à chaque élément A de $\mathcal{P}(\Omega)$ renvoie une valeur comprise entre 0 et 1. Soit

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0 ; 1]$$
$$A \rightarrow P(A)$$

II.2 Calcul

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires (composés d'une seule éventualité) ont la même probabilité. *Par exemple* pour le lancé d'un dé, chacun des 6 résultats possibles ont la même chance ou probabilité d'être réalisé à savoir $1/6$.

La probabilité de l'événement A est donnée par la formule:

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Nombre de cas satisfaisant l'événement } A}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

II.3 Exemples: Activités:

Consigne(s): Pour chaque expérience aléatoire suivante, donner le cardinal de l'univers Ω : ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire puis donner les probabilités des événements. On exprimera les probabilités sous forme de fractions irréductibles.

Soit l'expérience aléatoire suivante: On choisit au hasard une lettre dans l'alphabet de 26 lettres.

A : « La lettre est une voyelle (la lettre Y est une voyelle !). »

B : « La lettre est une consonne. »

C : « La lettre se trouve à coté (juste à coté) d'une voyelle dans l'alphabet. »

$$\text{Card}(\Omega) = \quad ; P(A) = \quad ; P(B) = \quad ; P(C) =$$

Soit l'expérience aléatoire suivante: On choisit au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

A : « La carte est un cœur »

B : « La carte est un huit. »

C : « La carte est une figure : valet, dame ou bien roi. »

D : « La carte est un roi ou bien un cœur » (soit l'un, soit l'autre, soit les deux en même temps)

$$\text{Card}(\Omega) = \quad ; P(A) = \quad ; P(B) = \quad ; P(C) = \quad ; P(D) =$$

Soit l'expérience aléatoire suivante: On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 (dé non pipé)

A : « Le résultat est strictement supérieur à 2. »

B : « Le résultat est impair. » $B = \{ 1; 3; 5 \}$

C : « Le résultat est inférieur ou égal à 4. »

D : « Le résultat est un nombre premier (en considérant 1 premier) »

$$\text{Card}(\Omega) = \quad ; P(A) = \quad ; P(B) = \quad ; P(C) = \quad ; P(D) =$$

Soit l'expérience aléatoire suivante: On choisit au hasard une case sur un jeu d'échec (64 cases)

A : « La case est blanche. »

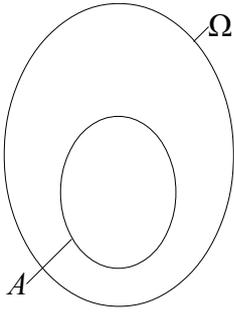
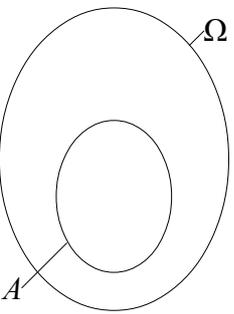
B : « La case est située sur le bord de l'échiquier. »

C : « La case est au centre (à l'intérieur!) de l'échiquier. »

$$\text{Card}(\Omega) = \quad ; P(A) = \quad ; P(B) = \quad ; P(C) =$$

Remarques : B et C sont des événements contraires : $\text{Card}(B) + \text{Card}(C) = 64$ ou $P(B) + P(C) = 1$.

III - Événements **contraires**

	<p style="text-align: center;">III.1 Définition et notation</p> <p>L'événement contraire (ou complémentaire) d'un événement A est l'événement qui contient toutes les éventualités qui ne sont pas dans A.</p> <p>L'événement contraire de A se lit « A barre » L'événement contraire de l'événement A est noté \bar{A}.</p> <p><i>Activités:</i> Hachurer <i>horizontalement</i> les éléments correspondants à l'événement \bar{A} sur le dessin de gauche.</p>	<p><i>Activités:</i> Expérience aléatoire: Lancé d'un dé. Univers Ω $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ Compléter les informations</p> <p>$A = \{1; 2; 3; 4\}$ $\bar{A} =$ $P(A) =$ $P(\bar{A}) =$</p> <p>La somme vaut $B =$ « Résultat pair » $B =$ $\bar{B} =$ $P(B) =$ $P(\bar{B}) =$</p> <p>La somme vaut $C =$ « Résultat < 5 » $P(C) =$ $P(\bar{C}) =$</p> <p>La somme vaut $D =$ « le résultat est différent de 4 » $P(D) =$ $P(\bar{D}) =$</p>
	<p style="text-align: center;">III.2 Probabilité de l'événement contraire</p> <p><i>Activités:</i> Hachurer <i>verticalement</i> les éléments de A. Hachurer <i>horizontalement</i> les éléments de \bar{A} Compléter la relation entre les trois nombres suivants: $\text{Card}(\Omega)$: Nombre d'éléments dans l'univers Ω, $\text{Card}(A)$: Nombre d'éléments dans l'événement A et $\text{Card}(\bar{A})$: Nombre d'éléments dans \bar{A} :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> $\text{Card}(\bar{A}) =$ </div> <p>En déduire la relation entre les probabilités $P(A)$ et $P(\bar{A})$ en complétant la propriété suivante.</p> <div style="background-color: #e0e0e0; border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 5px 0;"> <p>Soit Ω un univers et A un événement de Ω. Soit \bar{A} l'événement contraire à A, alors</p> <p style="text-align: center;">$P(\bar{A}) =$</p> </div>	
	<p style="text-align: center;">III.3 Événement(s) contraire(s) particuliers</p> <p>Quel est l'événement contraire de l'univers Ω ? Quelle est sa probabilité ?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>L'événement contraire de Ω est \emptyset et $P(\emptyset) = 0$</p> </div> <p>Quel est l'événement contraire de l'événement impossible \emptyset qui correspond à l'ensemble vide ? Quelle est sa probabilité ?</p> <div style="border: 1px solid black; height: 20px; margin: 5px 0;"></div>	<p>Pour événement $A \subset \Omega$, on a : $\emptyset \subset A \subset \Omega$ (\subset est le symbole de l'inclusion) donc pour les probabilités, on a : $P(\emptyset) < P(A) < P(\Omega)$ $0 < P(A) < 1$</p>

Activités:

Soit l'**expérience aléatoire** suivante: On choisit au hasard **une** carte d'un jeu de 32 cartes.

Soit les événements suivants:

A : « On n'obtient ni as ni roi », B : « On obtient un cœur ».

C : « On obtient une couleur rouge », D : « On obtient une carte portant le numéro 7, 8, 9 ou 10. »

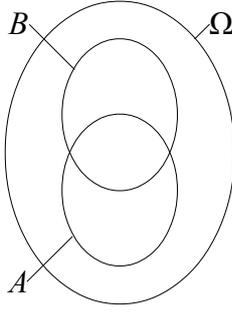
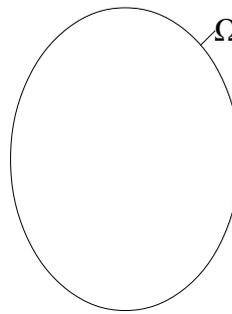
Compléter les informations manquantes **lignes par lignes**.

$P(A) =$; $P(B) =$; $P(A) + P(B) =$

$P(C) =$; $P(D) =$; $P(C) + P(D) =$

Peut-on conclure **pour autant** que les événements A et B puis C et D sont contraires ?

IV - Intersection de 2 événements A et B , noté $A \cap B$, lue « A inter B » ou « A et B »

	<p>IV.1 Définition et notation</p> <p>Soit Ω un univers et A et B deux événements de Ω. On appelle intersection de deux événements A et B, l'événement qui contient toutes les éventualités communes à A ET à B.</p> <p>L'intersection se lit « A inter B » ou bien « A et B » L'intersection est notée $A \cap B$.</p> <p><i>Activités:</i> Hachurer sur le dessin de gauche verticalement les éléments de A et horizontalement les éléments de B. Griser l'ensemble $A \cap B$.</p>	<p><i>Activités:</i></p> <p>Pour le lancé d'un dé, $A = \{1; 2; 3; 4\}$ $B = \{2; 5\}$ Donner $P(A) =$ Donner $P(B) =$ Donner $A \cap B =$ Donner $P(A \cap B) =$</p>
	<p>IV.2 Événements incompatibles ou disjoints</p> <p>Deux événements A et B sont dit incompatibles ou disjoints si et seulement si l'intersection de A et B est l'événement impossible, soit:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> $A \text{ et } B \text{ sont incompatibles} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ </div> <p><i>Activités:</i></p> <p>Représenter deux événements A et B incompatibles sur le dessin de gauche. Compléter également la propriété suivante:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> $A \text{ et } B \text{ sont incompatibles} \Leftrightarrow P(A \cap B) =$ </div>	<p><i>Activités:</i></p> <p>Pour le lancé d'un dé, donner deux événements disjoints.</p> <p>$A =$ $B =$ Donner alors $A \cap B =$ et $P(A \cap B) =$</p>
	<p>IV.3 Événements indépendants :</p> <p>Deux événements A et B sont indépendants si la probabilité de leur intersection est égale au produit de leur probabilité soit:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> $A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ </div> <p><i>Remarque:</i> Attention à bien faire la différence entre événements incompatibles et événements indépendants.</p>	<p><i>Activités:</i></p> <p>Voir l'exercice ci-dessous pour retrouver deux événements indépendants. La probabilité de l'un (A) ne dépend pas de la réalisation de l'autre (B)</p>

Activités:

Soit l'**expérience aléatoire** suivante: On tire au hasard **une** carte d'un jeu de 32 cartes.

Soit les événements suivants:

A : « On obtient un trèfle »; B : « On obtient une figure, roi, dame ou valet »

C : « On obtient un carreau » et D : « On obtient une dame »

Compléter les informations manquantes **lignes par lignes**.

$P(A) =$; $P(B) =$; $A \cap B =$; $P(A \cap B) =$

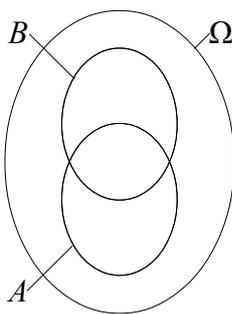
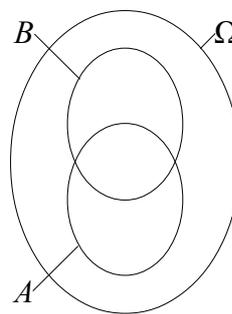
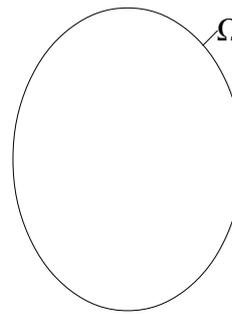
$P(C) =$; $P(D) =$; $C \cap D =$; $P(C \cap D) =$

Les événements A et B sont-ils **indépendants**?

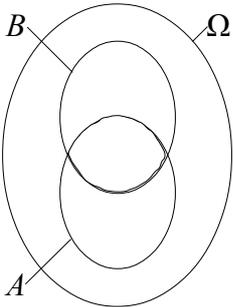
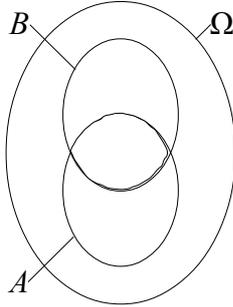
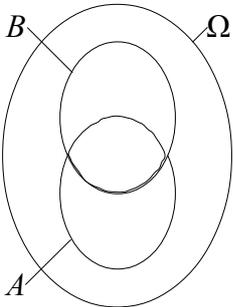
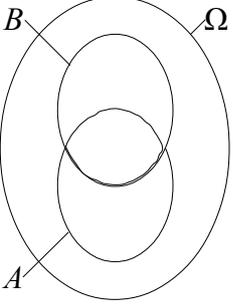
Les événements C et D sont-ils **indépendants**?

Remarques : Par contre, A et C **ne sont pas** indépendants car $P(A \cap C) = 0$ et $P(A) \times P(C) = 1/16$.

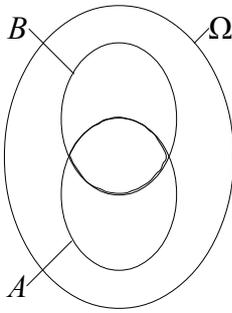
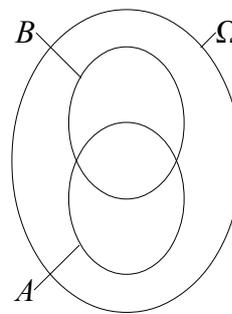
V - Réunion de 2 événements A et B , noté $A \cup B$, lue « A union B » ou « A ou B »

	<p>V.1 Définition et notation</p> <p>Soit Ω un univers et A et B deux événements de Ω. On appelle Union de deux événements A et B, l'événement qui contient toutes les éventualités de A OU de B. (Soit l'un, soit l'autre, soit les deux...)</p> <p>La réunion se lit « A union B » ou bien « A ou B »</p> <p>La réunion est notée $A \cup B$.</p> <p><i>Activités:</i> Hachurer sur le dessin de gauche verticalement les éléments de A et horizontalement les éléments de B. <i>Griser</i> l'ensemble $A \cup B$.</p>	<p>Activités:</p> <p>Expérience aléatoire: Lancé d'un dé.</p> <p>Univers Ω $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$</p> <p>Compléter les informations manquantes</p> <p>$\text{Card}(A) =$ $A = \{1; 2; 3; 4\}$ $B = \{2; 5\}$ $\text{Card}(B) =$</p>
	<p>V.2 Probabilité de $A \cup B$</p> <p><i>Activités:</i> Hachurer sur le dessin de gauche verticalement les éléments de A et horizontalement les éléments de B. Quels sont les éléments hachurés deux fois? Exprimer alors le nombre suivant:</p> <p>$\text{Card}(A \cap B) =$ Nombre d'éléments de $A \cap B$</p> <p>en fonction des trois nombres suivants</p> <p>$\text{Card}(A) =$ Nombre d'éléments de A</p> <p>$\text{Card}(B) =$ Nombre d'éléments de B</p> <p>$\text{Card}(A \cap B) =$ Nombre d'éléments de $A \cap B$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> $\text{Card}(A \cup B) =$ </div>	<p>$P(A) =$</p> <p>$P(B) =$</p> <p>$A \cap B =$</p> <p>$P(A \cap B) =$</p> <p>$A \cup B =$</p> <p>$P(A \cup B) =$</p>
	<p>V.3 Formule générale du calcul de $P(A \cup B)$</p> <p>Déduire de la relation trouvée ci-dessus la relation sur la probabilité en divisant chacun des membres par $\text{Card}(\Omega)$.</p> <div style="border: 1px solid black; background-color: #e0e0e0; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>Soit Ω un univers et A et B deux événements quelconques de Ω alors:</p> $P(A \cup B) =$ </div> <p>V.4 Cas particuliers où les 2 événements sont disjoints</p> <p><i>Activités:</i> Représenter sur le dessin de gauche deux événements incompatibles (revoir la définition si nécessaire). Hachurer verticalement les éléments de A et horizontalement les éléments de B.</p> <p>Quel est l'événement $A \cap B$?</p> <p>Quelle est sa probabilité?</p> <p>Conclure en terminant la phrase suivante:</p> <div style="border: 1px solid black; background-color: #e0e0e0; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>Soit Ω un univers et A et B deux événements incompatibles de Ω alors:</p> $P(A \cup B) =$ </div>	<p>Activités:</p> <p>Vérifier la formule de $P(A \cup B)$ avec les événements donnés ci-dessus.</p> <p>$P(A) =$</p> <p>$P(B) =$</p> <p>$P(A \cap B) =$</p> <p>$P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$</p> <p>et</p> <p>$P(A \cup B) =$</p> <p>Remarque :</p>

VI - Événement contraire à l'intersection $A \cap B$ et la réunion $A \cup B$

	<p>VI.1 Événement contraire à l'intersection $A \cap B$</p> <p>Activités: <i>Délimiter</i> sur le dessin de gauche les éléments correspondant à l'événement $A \cap B$ et <i>griser</i> les éléments appartenant à son événement contraire $\overline{A \cap B}$</p>	<p>Activités: Expérience aléatoire: Lancé d'un dé. Univers Ω $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $A = \{1; 2; 3; 4\}$ $B = \{2; 5\}$ $A \cap B =$ $\overline{A \cap B} =$</p>
	<p>Activités: Hachurer sur le dessin de gauche: <i>verticalement</i> les éléments correspondant à \overline{A} <i>horizontalement</i> les éléments correspondants à \overline{B} <i>Griser</i> alors les éléments de $\overline{A \cup B}$ En comparant les deux dessins, compléter la propriété suivante:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <p>Les événements $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cup B}$ sont</p> </div>	<p>$\overline{A} =$ $\overline{B} =$ $\overline{A \cup B} =$ Que remarque-t-on?</p>
	<p>VI.2 Événement contraire à la réunion $A \cup B$</p> <p>Activités: <i>Délimiter</i> sur le dessin de gauche les éléments correspondant à l'événement $A \cup B$ et <i>griser</i> les éléments appartenant à son événement contraire $\overline{A \cup B}$</p>	<p>Activités: Expérience aléatoire: Lancé d'un dé. Univers Ω $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $A = \{1; 2; 3; 4\}$ $B = \{2; 5\}$ $A \cup B =$</p>
	<p>Activités: Hachurer sur le dessin de gauche: <i>verticalement</i> les éléments correspondant à \overline{A} <i>horizontalement</i> les éléments correspondants à \overline{B} <i>Griser</i> alors les éléments correspondants à $\overline{A \cap B}$ En comparant les deux dessins, compléter la propriété suivante:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <p>Les événements $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B}$ sont</p> </div>	<p>$\overline{A \cup B} =$ $\overline{A} =$ $\overline{B} =$ $\overline{A \cap B} =$ Que remarque-t-on?</p>

VII - Probabilité conditionnelle, notée $P_B(A)$ ou $P(A/B)$, lue $P(A)$ sachant B

	<p>VII.1 Approche par la représentation graphique</p> <p>Jusqu'à présent, on travaillait dans l'ensemble univers Ω. Tous les événements A et ensemble associé était inclus dans l'univers. La probabilité d'un événement A était définie par:</p> $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$ <p>Dans la probabilité conditionnelle, on ne choisit plus les éléments dans l'univers Ω de départ mais dans un sous-ensemble B qui est inclus dans l'univers Ω. La probabilité $P(A)$ reste définie de la même manière sauf que l'on choisit désormais les éléments obligatoirement dans l'ensemble B, qui remplace en quelque sorte l'univers Ω. La probabilité conditionnelle est alors définie par:</p> $P_B(A) = \frac{\text{Nbr d'éléments de } A, \text{ choisis dans } B}{\text{Nombre d'éléments de } B}$ <p>Activités: Délimiter sur le dessin de gauche l'ensemble B. Griser les éléments de A sachant qu'on les choisit obligatoirement dans l'ensemble B. A quel ensemble correspond ces éléments?</p>	<p>Activités:</p> <p>Appliquer la définition de la probabilité conditionnelle pour calculer les probabilités suivantes.</p> <p>$A = \{1; 2; 3; 4\}$ $B = \{2; 5\}$</p> <p>Donner $P_B(A) =$</p> <p>Donner $P_A(B) =$</p> <p><i>Pour rappel :</i> $P(A) =$ $P(B) =$ $P(A \cap B) =$ $P(A \cup B) =$</p>
	<p>VII.2 Approche mathématique: définition et notation</p> <p>Soit Ω un univers et A et B deux événements de Ω. On appelle probabilité conditionnelle A sachant B ou probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est déjà réalisé est le rapport entre la probabilité de $A \cap B$ et la probabilité de B. La probabilité conditionnelle se note $P_B(A)$ ou $P(A/B)$. La probabilité conditionnelle $P_B(A)$ se lit $P(A)$ sachant B.</p> <p>La probabilité conditionnelle $P(A)$ sachant B est:</p> $P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	<p>Activités:</p> <p>$A = \{1; 2; 3; 4\}$ $B = \{2; 5\}$</p> <p>$P(A) =$</p> <p>$P(B) =$</p> <p>$A \cap B =$</p> <p>$P(A \cap B) =$</p> <p>$P_B(A) =$</p> <p>$P_A(B) =$</p>

Activités:

Soit l'expérience aléatoire suivante: On lance un dé à 6 faces. Soit les événements suivants: A : « On obtient un résultat strictement supérieure à 2 » et B : « On obtient un résultat pair » Compléter les informations manquantes colonnes par colonnes.

$A =$; $P(A) =$; $A \cap B =$; $P_B(A) =$
 $B =$; $P(B) =$; $P(A \cap B) =$; $P_A(B) =$

VIII - Exercices d'applications: construction d'arbre(s) de probabilités

VIII.1 Règles générales sur les arbres de probabilités:

Un arbre de probabilités est la représentation sous forme graphique de tous les résultats possibles associés à une expérience aléatoire.

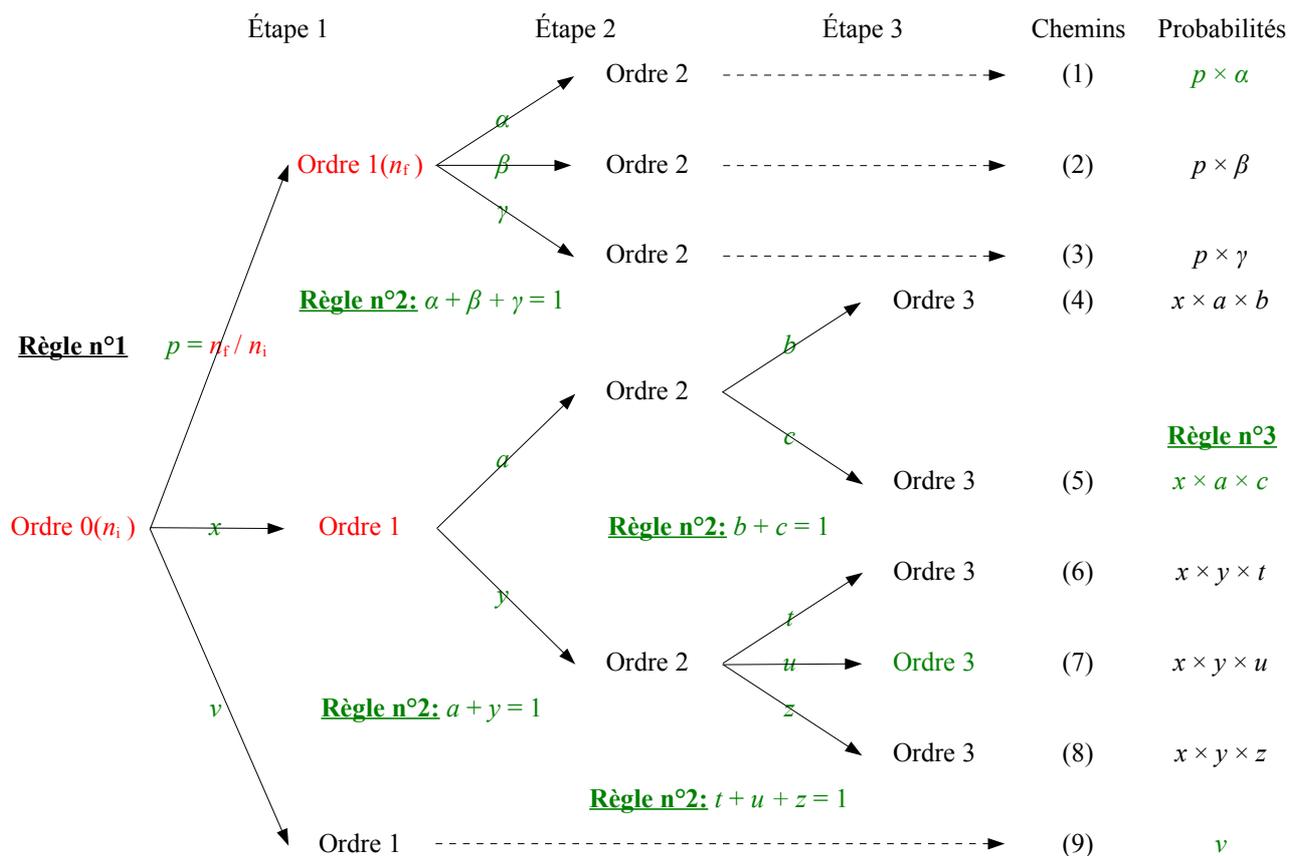
Règle n°0: Un arbre de probabilités se construit de gauche à droite (du haut vers le bas) à partir d'un nœud principal (où d'ordre 0). Les résultats possibles de chacune des **ième étapes** de l'expérience aléatoire sont représentés par de nouveaux embranchements et de nouveaux nœuds (d'ordre i) sur l'arbre de probabilités.

Règle n°1: La **probabilité** d'une branche est égale au **rapport** des **effectifs** entre le nœud **final** et le nœud **initial**. Ces **probabilités** sont indiquées **au centre** des branches sous forme décimale.

Règle n°2: La somme des **probabilités** des branches partant d'un même nœud initial est égale à 1.

Règle n°3: La **probabilité** d'un chemin (complet ou incomplet) partant **du** nœud principal est égale au **produit** des probabilités des branches qui composent ce chemin.

Règle n°4: La probabilité d'un événement A est égale à la **somme** des probabilités des chemins sur l'arbre qui respectent la condition de l'événement A .



Règle n°4: Si les chemins (2), (6) et (9) vérifient la condition imposée par l'événement A , alors:

$$P(A) = p(2) + p(6) + p(9) = p \times \beta + x \times y \times t + v$$

VIII.2 La classe et l'option

Énoncé: Une classe est constituée de 35 étudiants, parmi lesquels 20 garçons et 15 filles. Parmi les 20 garçons, 12 étudient le russe. Parmi les 15 filles, 8 étudient le russe.

L'**expérience aléatoire** consiste à choisir une personne au hasard dans la classe.

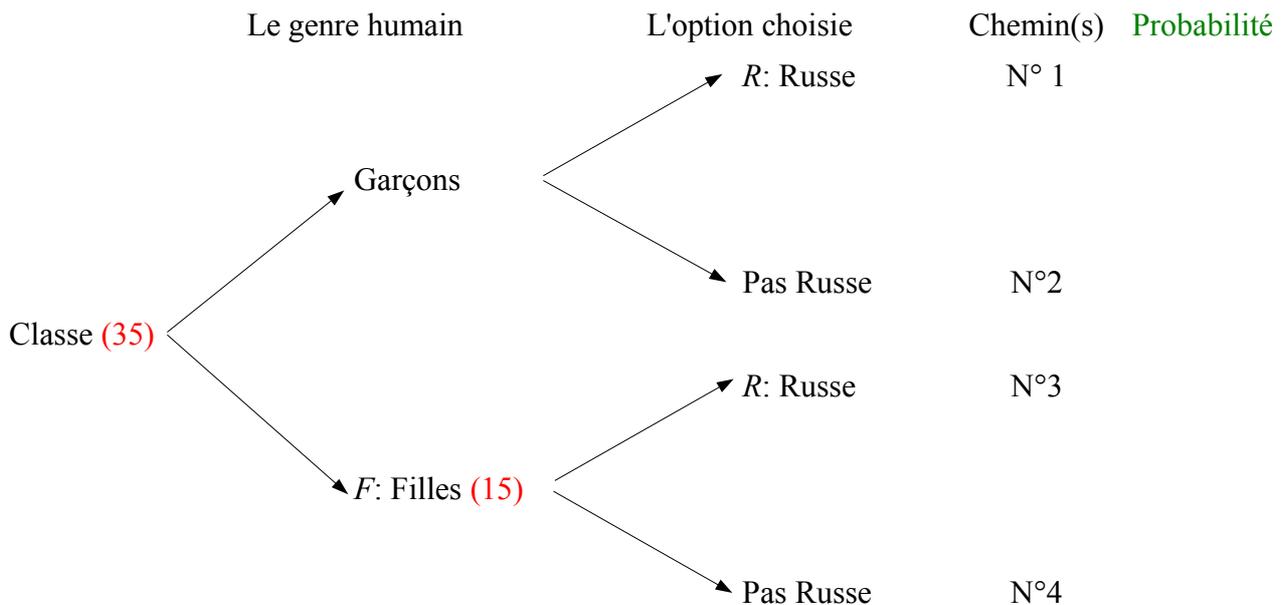
On note les événements suivants:

F : « La personne choisie est une fille »

R : « La personne choisie étudie le russe »

- Pour une personne choisie au hasard, quelles peuvent être ses caractéristiques?
- Construire un arbre qui permet de représenter tous les résultats possibles issus de l'expérience aléatoire. Indiquer les **effectifs** à chaque **embranchement** ou **nœud** de l'arbre.
- Indiquer les **probabilités** de chacune des « branches » de l'arbre (Cf. Règle n°1).
- Compléter l'arbre de probabilités en indiquant les **probabilités manquantes** (Cf. Règle n°2).
- Indiquer pour chacun des résultats possibles (c'est à dire chacune des branches de l'arbre ou bien chacun des chemins possibles sur l'arbre) la **probabilité associée**. (Cf. Règle n°3).
- Donner les probabilités suivantes: $P(F)$, $P(R)$ (Cf. Règle n°4) et $P(F \cap R)$.
En déduire si les deux événements F et R sont **indépendants** ou non?
- Reprendre la question f) avec la même classe où cette fois-ci il y a non plus 8 filles mais 9 filles qui étudient le russe.

Question b) à e) Voir Arbre ci-dessous.



Question f)

Avec 8 filles sur 15 qui étudient le russe

$$P(F) =$$

$$P(R) =$$

$$P(F \cap R) =$$

$$P(F) \times P(R) =$$

Question g)

Avec 9 filles sur 15 qui étudient le russe

$$P(F) =$$

$$P(R) =$$

$$P(F \cap R) =$$

$$P(F) \times P(R) =$$

VIII.3 La cage et les oiseaux

Énoncé: Une cage est constituée de 11 oiseaux, parmi lesquels 5 oiseaux mâles et 6 oiseaux femelles. On numérote les oiseaux mâle de 1 à 5 pour les différencier. On numérote les oiseaux femelles de 1 à 6 pour les différencier.

L'expérience aléatoire consiste à choisir d'abord un oiseau dans la main gauche puis, sans remettre l'oiseau choisi dans la cage, de choisir dans la main droite un autre oiseau parmi ceux restants dans la cage. On effectue ce qu'on appelle un tirage sans remise.

Un résultat possible est donc le couple (2 ; 3): oiseau mâle portant le n°2 dans la main gauche et oiseau femelle portant le n°3 dans la main droite. Ce résultat est différent du résultat suivant: (3 ; 2) bien que l'on ait choisi les deux mêmes oiseaux.

On note les événements suivants:

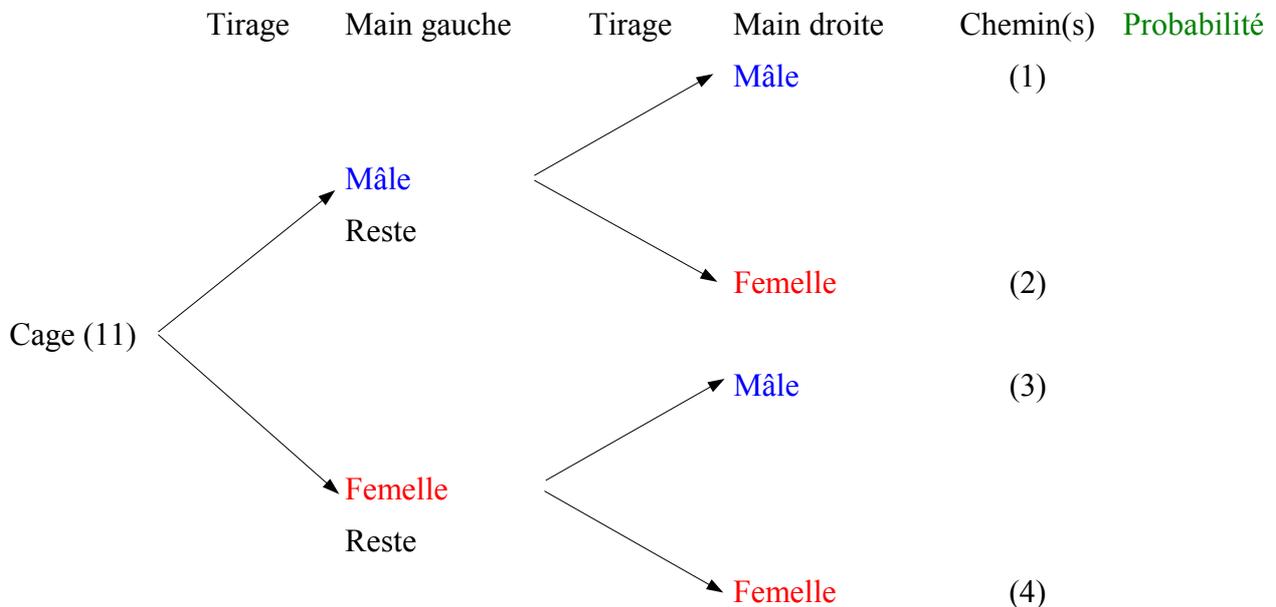
M : « Les deux oiseaux choisis sont de sexe mâle »

F : « Les deux oiseaux choisis sont de sexe femelle »

S : « Les deux oiseaux choisis sont de même sexe »

- Construire l'arbre de probabilités relatif uniquement au tirage de la main gauche (1^{er} tirage)
- Compléter l'arbre de probabilités en construisant les branches relatives au tirage de la main droite (2nd tirage).
- Indiquer les probabilités sur chacune des branches de l'arbre. Attention au nombre d'oiseaux restants dans la cage et au type d'oiseau choisi lors du 1^{er} tirage pour indiquer les probabilités.
- Donner les probabilités suivantes: $P(M)$ et $P(F)$.
- Que vaut $M \cap F$? Que peut-on dire des événements M et F ? Que vaut $M \cup F$?
- Quelle relation y-a-t-il entre $P(M)$, $P(F)$ et $P(S)$? Que vaut alors $P(S)$?
- Donner alors la probabilité $P(\bar{S})$ de choisir deux oiseaux de sexe différents.

Question b) à c) Voir Arbre ci-dessous.



d) $P(M) =$

e) $M \cap F =$

$M \cup F =$

f) $P(S) =$

donc $P(\bar{S}) =$

g) $P(\bar{S}) =$

VIII.4 Rendement d'une chaîne de production

Énoncé: Dans une entreprise de production d'emballage cartonné, chaque feuille de matière brute (matière première) subit deux étapes: Une étape de découpe qui donne le patron de l'emballage carton et une étape d'impression couleur des motifs de l'emballage. On considère que chacune des deux étapes sont **indépendantes** l'une de l'autre.



On note les événements suivants:

D : « La feuille est bien découpée » et I : « La feuille est bien imprimée »

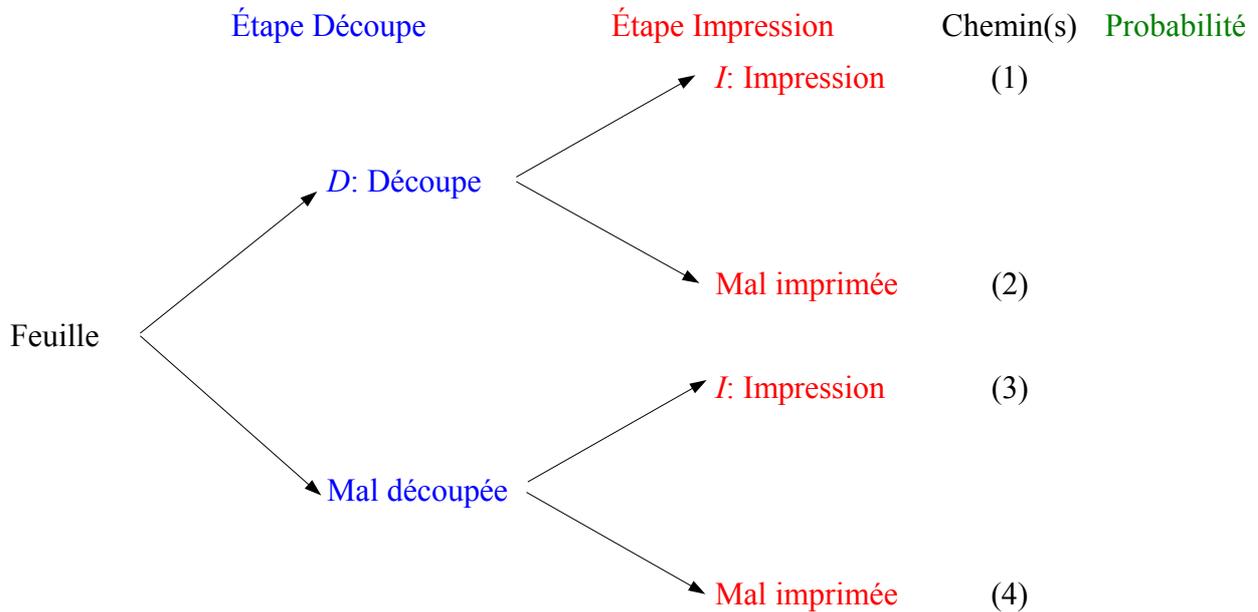
Les événements D et I sont **indépendants**. On constate en sortie de chaîne de production que 2% des feuilles sortent mal découpées et 4% des feuilles sortent mal imprimées.

L'**expérience aléatoire** consiste à choisir une feuille en sortie de chaîne de production.

L'**objectif** est de donner la probabilité qu'une feuille en sortie de chaîne sorte **en bon état**.

- Construire l'arbre de probabilités relatif uniquement à la 1^{ère} étape.
- Compléter l'arbre de probabilités en construisant les branches relatives à la 2^{nde} étape.
- A partir des données de l'énoncé, indiquer les probabilités de certaines branches de l'arbre. On rappelle que les événements D et I sont **indépendants**.
- Compléter l'arbre de probabilités en indiquant les probabilités manquantes (Cf. Règle n°2).
- Quelle est la probabilité qu'une feuille en sortie de chaîne sorte **en bon état** ?

Question a) à d) Voir Arbre ci-dessous.



Rappels : Les données sont $P(\bar{D}) = 0,02$ et $P(\bar{I}) = 0,04$ et D et I sont **indépendants**. On déduit $P(D) = 0,98$ et $P(I) = 0,96$. Sur l'arbre, on indique :