

I – Vocabulaire

Expérience aléatoire	Expérience dont les résultats dépendent du hasard (dé, carte, ...)
Univers Ω	Ensemble de tous les résultats.
Ensemble \emptyset	Ensemble vide.
Ensemble A	Partie de l'univers Ω .
Évènement contraire à A	Éléments x qui ne sont pas dans A . <i>Lu:</i> « A barre » – <i>Noté:</i> \bar{A} .
Inclusion	<i>Lu:</i> « A inclus dans B » <i>Noté:</i> $A \subset B$ $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

II – Probabilité et propriétés

$P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1, \emptyset \subset A \subset \Omega, 0 \leq P(A) \leq 1$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nbre d'éléments de } A}{\text{Nbre d'éléments de } \Omega}$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

III – Intersection $A \cap B$ et propriétés

Lecture: « A inter B » – *Notation:* $A \cap B$
Constitution: Éléments communs à A ET B

A et B sont ... \Leftrightarrow Propriété associée

Incompatibles $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$

Indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

IV – Union ou réunion $A \cup B$ et propriétés

Lecture: « A union B » – *Notation:* $A \cup B$
Constitution: Éléments de A OU BIEN de B (soit dans A , soit dans B , soit dans les deux)

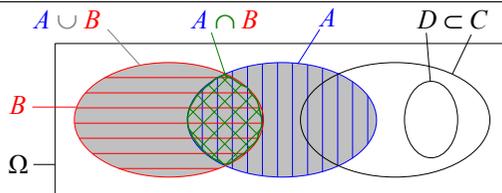
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

V – Probabilité conditionnelle $P(A)$ sachant C

L'univers Ω est restreint à l'évènement C .
Lecture: « $P(A)$ sachant C » – *Notat°:* $P_C(A)$

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\text{Nbre éléments } A \cap C}{\text{Nbre éléments de } C}$$

VI – Représentation graphique

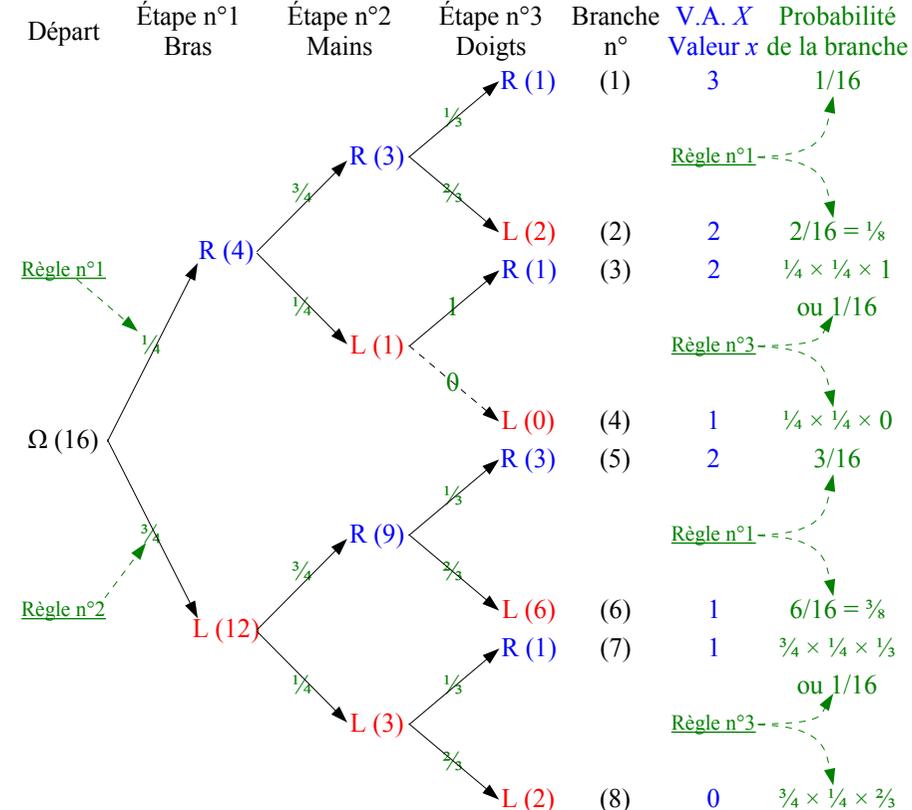


Probabilités sur un univers Ω fini ou dénombrable et variable aléatoire X associée (Auteur : S. Basnary – Version 2013)

Soit l'univers Ω constitué d'un échantillon de 16 personnes. Nous avons observé quelle partie du corps: **R** (right) pour la partie droite et **L** (left) pour la partie gauche, est croisée au dessus de l'autre pour chacune des étapes ci-dessous:

Observable:	Étape n°1	Étape n°2	Étape n°3
Croisement des	Bras	Mains	Doigts

Nous avons alors représenté sous la forme d'un arbre de probabilité tous les résultats de l'échantillon avec les embranchements à chacune des étapes.



L'univers Ω est constitué de huit éléments ω (i.e. L'arbre de probabilité possède huit branches.) On définit la **variable aléatoire** X qui à chaque élément ω de Ω (chacune des branches de l'arbre) associe le nombre x d'apparition de la lettre **R**. La **loi de probabilité** de X présentée sous la forme d'un tableau de valeurs est :

x_i (ordre croissant)	0	1	2	3	
$p_i = P(X = x_i)$	2/16	7/16	6/16	1/16	avec $\sum p_i = 1$
					$E(X) = 22/16 = 1,375$
					$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0,78$

VII – Utilisation d'un arbre de probabilité

Soit l'expérience aléatoire : On choisit une personne au hasard dans l'échantillon des 16 personnes (L'univers Ω). Soient les évènements :
A La personne est gauchère pour les doigts croisés
B La personne est droitrière pour les mains croisées
Donner $P(A), P(B), P(A \cap B), P(A \cup B)$ et $P(A/B)$

	Branches	Probabilité associée
A	Branches paires	$P(A) = 2/16 + 0 + 6/16 + 2/16$ $P(A) = 10/16 = 5/8$
B	1, 2, 5 et 6	$P(B) = 1/16 + 1/8 + 3/16 + 3/8$ $P(B) = 12/16 = 3/4$
$A \cap B$	2 et 6	$P(A \cap B) = 2/16 + 6/16 = 1/2$
$A \cup B$	Cf. IV	$P(A \cup B) = 5/8 + 3/4 - 1/2 = 7/8$
$A \cup B$	Toutes sauf 3 et 7	$P(A \cup B) = 1 - (1/16 + 1/16)$ $P(A \cup B) = 7/8$ (idem)

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/2}{3/4} = 1/2 \times 4/3 = 2/3$$

VIII – Variable aléatoire X et propriétés

Définition n°1: Une **variable aléatoire** X définie sur un univers Ω est une **application** qui à tout élément ω_i de Ω associe un **réel** x_i . L'ensemble des valeurs prises par X est notée $X(\Omega)$. Soit:

$$X: \Omega \rightarrow X(\Omega) \subset \mathbb{R}$$

$$\omega_i \rightarrow x_i \in \mathbb{R}$$

Définition n°2: La **loi de probabilité** de X est la **fonction** f ou d qui à toute valeur x_i de $X(\Omega)$ associe la probabilité $p_i = P(X = x_i)$. Soit:

$$d: X(\Omega) \rightarrow [0; 1]$$

$$x_i \rightarrow p_i = P(X = x_i)$$

Définition n°3: La **fonction de répartition** de X est la **fonction notée** F qui à tout réel x associe le nombre $F(x) = P(X < x)$. Soit:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$$

$$x \rightarrow P(X < x)$$

Définition n°4: Valeurs caractéristiques de X :

<i>Lecture</i>	<i>Notation</i>	<i>Expression</i>
Espérance	$E(X)$ ou \bar{X}	$\sum p_i \times x_i$
Variance	$V(X)$	$\sum p_i \times (x_i)^2 - (\bar{X})^2$
Écart-type	$\sigma(X)$	$\sqrt{V(X)}$