Exercices de Mathématiques

Thème:

Loi binomiale – Loi de Poisson – Loi normale – Intervalle de confiance

Table des matières

EXERCICE n°1: *Loi binomiale* $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ $\quad P(X=k)=C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$

Objectif(s): Compléter les informations manquantes du tableau ci-dessous.

Consigne(s): Utiliser votre formulaire BTS, le cours et les fonctionnalités de votre calculatrice. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale dans le cas où il y a ***n* tirages consécutifs avec remise**, chaque tirage conduisant à deux événements élémentaires: **succès (de probabilité *p*)** ou échec (de probabilité $q = 1 - p$). La valeur k prise par X correspond au **nombre de succès** sur les n tirages et la probabilité associée est : $P(X=k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$

	Données			Grandeurs associées à la variable aléatoire X vérifiant la loi binomiale.				
N°	n	p	k	Expression écrite	Expression	Valeur	E(X)	σ(X)
1	25	0,1	6	Probabilité que X soit exactement égale à k.				
2	35	0,15	9		$P(X=k)$			
3	50	0,2	1	Probabilité que X soit différent de k.				
4	40	0,2	4		$P(X\neq k)$			
5	45	0,15	5	Probabilité que X soit inférieure ou égale à k.				
6	40	0,05	1		$P(X\leq k)$			
7	40	0,15	6	Probabilité que X soit strictement inférieure à k.				
8	45	0,1	3		$P(X<k)$			
9	35	0,1	6	Probabilité que X soit supérieure ou égale à k.				
10	45	0,05	5		$P(X\geq k)$			
11	25	0,2	5	Probabilité que X soit strictement supérieure à k.				
12	50	0,05	3		$P(X>k)$			
13	25	0,15	2	Probabilité que X soit exactement égale à k.				
14	35	0,05	2		$P(X=k)$			
15	25	0,05	2	Probabilité que X soit différent de k.				
16	25	0,1	7		$P(X\neq k)$			
17	25	0,2	3	Probabilité que X soit inférieure ou égale à k.				
18	25	0,05	2		$P(X\leq k)$			
19	35	0,15	4	Probabilité que X soit strictement inférieure à k.				
20	35	0,05	5		$P(X<k)$			
21	25	0,15	10	Probabilité que X soit supérieure ou égale à k.				
22	35	0,05	6		$P(X\geq k)$			
23	30	0,15	2	Probabilité que X soit strictement supérieure à k.				
24	30	0,2	1		$P(X>k)$			

EXERCICE n°2: *Loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\times e^{-\lambda}$

Objectif(s): Compléter les informations manquantes du tableau ci-dessous.

Consigne(s): Utiliser votre formulaire BTS, le cours et les fonctionnalités de votre calculatrice. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi de poisson, loi qui est le cas particulier de la loi binomiale lorsque $n \to +\infty$, $p \to 0^+$ avec $n \times p = \lambda$. La valeur k prise par X correspond au **nombre de succès** sur les n tirages et la probabilité associée est : $P(X=k) = \lambda^k \times e^{-\lambda} \div k!$

	Données		Grandeurs associées à la variable aléatoire X vérifiant la loi de Poisson.				
N°	λ	k	Expression écrite	Expression	Valeur	E(X)	σ(X)
1	4	10	Probabilité que X soit exactement égale à k.				
2	5	3		$P(X=k)$			
3	2	1	Probabilité que X soit différent de k.				
4	7	6		$P(X\neq k)$			
5	9	7	Probabilité que X soit inférieure ou égale à k.				
6	1	9		$P(X\leq k)$			
7	8	5	Probabilité que X soit strictement inférieure à k.				
8	6	8		$P(X<k)$			
9	4	3	Probabilité que X soit supérieure ou égale à k.				
10	3	7		$P(X\geq k)$			
11	10	2	Probabilité que X soit strictement supérieure à k.				
12	2	6		$P(X>k)$			
13	9	5	Probabilité que X soit exactement égale à k.				
14	10	4		$P(X=k)$			
15	7	6	Probabilité que X soit différent de k.				
16	9	8		$P(X\neq k)$			
17	1	5	Probabilité que X soit inférieure ou égale à k.				
18	8	1		$P(X\leq k)$			
19	2	2	Probabilité que X soit strictement inférieure à k.				
20	10	4		$P(X<k)$			
21	6	8	Probabilité que X soit supérieure ou égale à k.				
22	6	6		$P(X\geq k)$			
23	3	2	Probabilité que X soit strictement supérieure à k.				
24	5	3		$P(X>k)$			

EXERCICE n°3: *Loi Normale centrée réduite* $\mathcal{N}(m = 0\ ;\ \sigma = 1)$*: approche*

Objectif(s): Compléter les informations manquantes du tableau ci-dessous.

Consigne(s): En vous aidant de l'exemple, utiliser votre formulaire BTS, le cours et les fonctionnalités de votre calculatrice pour compléter les colonnes t et/ou $P(t)$ puis $R(t)$ et $Q(t)$.

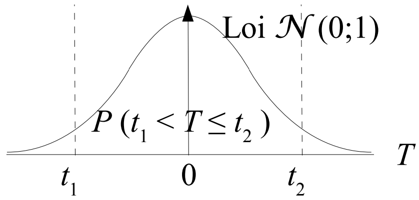
Données: On rappelle qu'une variable aléatoire T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ lorsque le calcul de la probabilité $P\ (\ T \leq t\ )$ est définie par le calcul de l'intégrale (donc de l'aire) suivante:

$$\Pi(t) = \quad P(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx \qquad \text{où} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

La fonction $f(x)$ est appelée fonction densité de probabilité. Les probabilités $\Pi(-t)$, $Q(t)$ est $R(t)$ sont définies par des calculs d'intégrales qui se déduisent de $P(t)$ par propriétés graphiques de $f(x)$.

		Valeurs de Π, Q et R pour $t > 0$				Valeurs de Π, Q et R pour $t < 0$			
N°	t	$\Pi(t) = P(t)$	$Q(t)$	$R(t)$	t	$\Pi(t) = P(t)$	$Q(t)$	$R(t)$	N°
1	0,65	0,7422	0,2422	0,2578	-1,56	0,0594	-0,4406	0,9406	1
2	1,05				-1,35				2
3	0,3				-1,12				3
4	1,6				-0,58				4
5	0,49				-1,57				5
6		0,9633				0,2327			6
7		0,8708				0,4404			7
8		0,8023				0,0582			8
9		0,9649				0,3050			9
10		0,7517				0,0250			10
11				0,1635				0,5438	11
12				0,2119				0,9525	12
13				0,0793				0,7910	13
14				0,3483				0,9207	14
15				0,0668				0,8133	15
16			0,1772				-0,1026		16
17			0,2224				-0,0987		17
18			0,2611				-0,4319		18
19			0,4418				-0,3665		19
20			0,2257				-0,4236		20

EXERCICE n°4: *Loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(m = 0 ; \sigma = 1)$: calcul de probabilités*



Objectif(s): Compléter les informations manquantes du tableau ci-dessous.

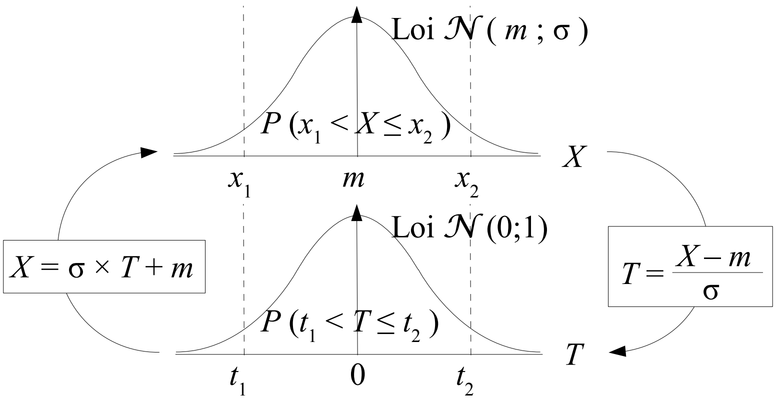
Consigne(s): En vous aidant des exemples, utiliser votre formulaire BTS, le cours, les fonctionnalités de votre calculatrice et les techniques mises en oeuvres dans l'exercice précédent pour déterminer les valeur t et/ou $\Pi(t)$ puis en déduire la probabilité $P(t_1 < T \leq t_2) = \Pi(t_2) - \Pi(t_1)$. **Dans le tableau de droite**, le raisonnement est identique mais c'est un cas particulier où $t_1 = -t_2 = -t$. **Dans les cinq dernières lignes du tableau de droite**, pensez à faire une figure et à raisonner sur les propriétés graphiques de la figure, notamment de symétrie, pour donner $\Pi(t)$ puis t.

	Variables		$\Pi(t_1)$ ou	$\Pi(t_2)$ ou	Intégrale ou	Variable		$\Pi(-t)$ ou	$\Pi(t)$ ou	Intégrale ou
N°	t_1	t_2	$P(T \leq t_1)$	$P(T \leq t_2)$	$P(t_1 < T \leq t_2)$	$-t$	t	$P(T \leq -t)$	$P(T \leq t)$	$P(-t < T \leq t)$
1	-1,42	1,26	0,0778	0,8962	0,8184	-1	1	0,1587	0,8413	0,6827
2	-0,74	1,95				-2	2			
3	-1,85	0,8				-0,5	0,5			
4	-1,13	1,51				-1,5	1,5			
5	-0,81	0,95				-2,5	2,5			
6	-1,74			0,9515					0,6293	
7	-1,4			0,9474					0,8869	
8	-0,42			0,7967					0,8531	
9	-1,88			0,6443					0,7190	
10	-0,6			0,8621					0,9306	
11		0,64	0,0281					0,0427		
12		0,64	0,0708					0,3483		
13		1,93	0,0359					0,0375		
14		1,51	0,1112					0,2483		
15		1,95	0,2148					0,3745		
16			0,1539	0,6026		-1,65	1,65	0,050	0,950	0,90
17			0,3085	0,6879						0,98
18			0,0465	0,9535						0,95
19			0,0314	0,6406						0,92
20			0,2005	0,8438						0,99

EXERCICE n°5: *Loi Normale $\mathcal{N}(m \,;\, \sigma)$: calcul de probabilités*

Objectif(s): Compléter les informations manquantes du tableau ci-dessous **ligne** par **ligne**.

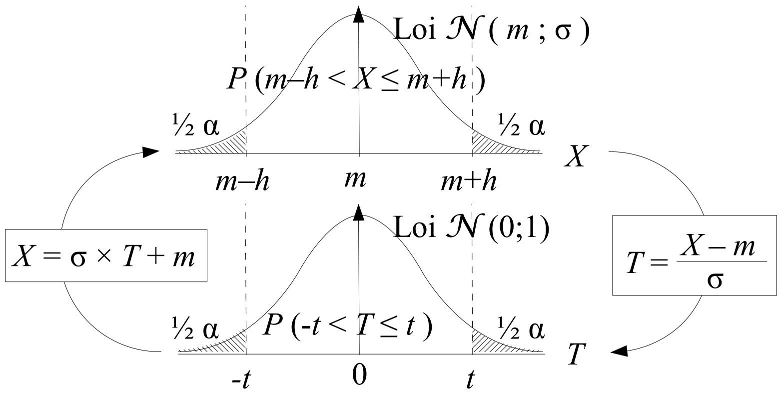
Consigne(s): En vous aidant de l'exemple, utiliser les relations de passages entre les variables aléatoires X (loi normale $\mathcal{N}(m \,;\, \sigma)$) et T (loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$), les techniques des deux exercices précédents ou bien les fonctionnalités de votre calculatrice.



Données: Les relations de passages entre X et T sont celles du dessin ci-dessus.

	Données		Variable aléatoire X : Loi $\mathcal{N}(m \,;\, \sigma)$			Variable aléatoire T associée: Loi $\mathcal{N}(0;1)$				
N°	m	σ	x_1	x_2	$P(x_1 < X \leq x_2)$	t_1	t_2	$P(T \leq t_1)$	$P(T \leq t_2)$	$P(t_1 < T \leq t_2)$
1	34	5	30,95	45,30	0,7172	-0,61	2,26	0,2709	0,9881	0,7172
2	26	2,9	24,99	27,39						
3	12	2,1	8,89				1,09			
4	36	4,8	29,38				1,52			
5	50	3,1	44,92						0,9115	
6	46	4,3	39,64						0,9929	
7	30	3,1		34,34		-2,29				
8	40	1		41,36		-0,87				
9	10	4,7		16,58				0,0158		
10	22	4,1		23,19				0,1587		
11	48	2,9				-1,82	1,95			
12	10	1				-1,80	0,29			
13	44	0,5				-0,16			0,9452	
14	10	2,5				-1,76			0,7734	
15	48	2					2,09	0,0183		
16	20	3,4					0,46	0,0853		
17	36	2,8						0,3821	0,7673	
18	10	4,7						0,0427	0,8531	
19	42	2,8	38,53	45,61						
20	40	2,9	34,46	45,42						

EXERCICE n°6: *Loi Normale $\mathcal{N}(m\ ;\ \sigma)$: Intervalle de confiance au seuil de risque α.*



Objectif(s): Compléter les informations manquantes du tableau ci-dessous **ligne** par **ligne**.

Consigne(s): L'exercice est identique au précédent dans le cas où les valeurs x_1 et x_2 sont centrées sur la moyenne m.

Données: Par propriété de symétrie de la figure, nous notons α le seuil de risque, tel que: $P(m-h < X \leq m+h) = 1-\alpha$. L'intervalle $[\ m-h\ ;\ m+h\ ]$ est appelé intervalle de confiance au taux de confiance $1-\alpha$.

	Données			Variable aléatoire X : Loi $\mathcal{N}(m\ ;\sigma)$			Variable aléatoire T associée: Loi $\mathcal{N}(0;1)$			
N°	m	σ	α	$x_1 = m-h$	$x_2 = m+h$	$P(x_1 < X \leq x_2)$	t	$P(T \leq -t)$	$P(T \leq t)$	$P(-t < T \leq t)$
1	50	2,7	0,1	45,56	54,44	0,9000	1,65	0,0500	0,9500	0,9000
2	50	3,3	0,26							
3	32	0,6	0,11							
4	16	4,5	0,28							
5	24	3,5	0,25							
6	44	2,4	0,18							
7	50	1,2	0,08							
8	32	1,9	0,15							
9	50	0,2				0,7600				
10	12	3,4				0,9600				
11	16	4,1				0,9200				
12	28	2,6								0,7800
13	16	2,2								0,7500
14	46	1,3								0,8500
15	32	5							0,9250	
16	20	1,8							0,8700	
17	24	1,7							0,8750	
18	20	1,8						0,1500		
19	50	4,5						0,1150		
20	18	0,2						0,0750		