Variable aléatoire continue X : loi normale $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$ définie par la loi de probabilité $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\times\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$

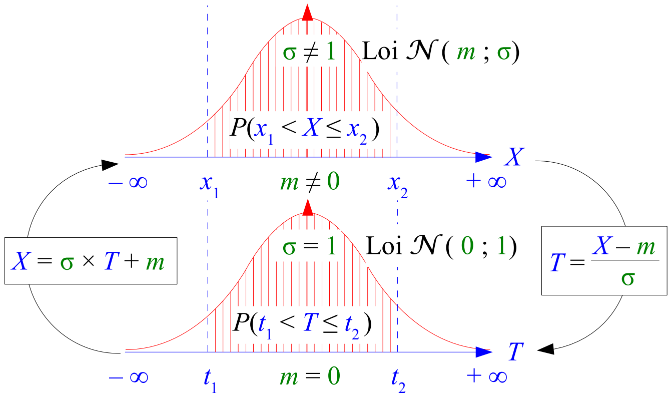
(Réalisation : M. Basnary – Version 2013)

Calcul de probabilité

I – Définition(s) et représentation(s)

Une v.a. X suit une loi normale $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$ de moyenne m et d'écart-type σ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la formule donnée ci-dessus. Les propriétés de X sont: $E(X) = m$ et $\sigma(X) = \sigma$.

Si une v.a. X suit la loi normale $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$, alors la v.a. $T = (X - m) / \sigma$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$



II – Calcul(s) pour les lois $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$ et $\mathcal{N}(0\,;1)$

Par propriété du changement de variable entre X et T, on a:

$p = P(x_1 < X \le x_2) = P(t_1 < T \le t_2) = \Pi(t_2) - \Pi(t_1)$

Exemple: Données: fond gris. Calculs: fond blanc

Loi $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$				Loi $\mathcal{N}(0\,;1)$				Probabilité
m	σ	x_1	x_2	t_1	$\Pi(t_1)$	t_2	$\Pi(t_2)$	p
15	2	12	16	–1,5	0,0668	½	0,6915	0,6247

Avec t_2 = ½ et $\Pi(t_2) = \Pi(½)$ = 0,6915 (voir formulaire) et

$t_1 = -1{,}5$, $\Pi(t_1) = \Pi(-1{,}5) = 1 - \Pi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

	Données: m, σ, x_1 et x_2 – Calcul $p = P(x_1 < X \le x_2)$
Casio 35+	Menu/Stat/Dist/Norm/Ncd lower: x_1; upper: x_2; σ: σ; μ: m
TI82	2nd Var/Distr/Normalcdf(x_1, x_2, m, σ)

Statistique inférentielle : Estimation(s)

I – Estimation ponctuelle

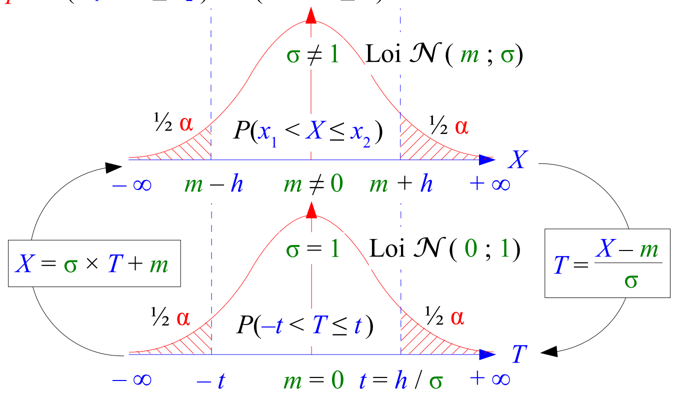
Population	Moyenne	Fréquence	Écart-type
Mère (taille N)	Inconnue m	Inconnue f	Inconnue σ
Échantillon ou Fils (taille n)	$m = m_e$	$f = f_e$	$\sigma = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}\,\sigma_e$

II – Estimation par intervalle de confiance

On cherche à obtenir un intervalle centré autour du paramètre étudié (moyenne m ou fréquence f) qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$ avec un seuil de risque α donné.

$[\,x_1 = m - h\,;\, x_2 = m + h\,]$ sera l'intervalle de confiance et

$p = P(x_1 < X \le x_2) = P(-t < T \le t)$ le seuil de confiance.



A partir du graphique de la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$, on a :

$\Pi(t) = \Pi(h/\sigma) = 1 - \alpha/2$ et

$p = \Pi(t) - \Pi(-t) = \Pi(t) - (1 - \Pi(t)) = 2\,\Pi(t) - 1 = 1 - \alpha$

Tableau: Données: fond gris. Calculs: fond blanc

α	0,6171	0,3173	0,1	0,05	0,0455	0,01	0,0027
$\Pi(t)$	0,6915	0,8413	0,95	0,975	0,9772	0,995	0,9987
$t = h/\sigma$	0,5	1	1,645	1,96	2	2,58	3
p	0,3829	0,6827	0,9	0,95	0,9545	0,99	0,9973

Exemple: si un échantillon de taille n = 10 permet d'estimer ponctuellement $m = m_e = 15$ et $\sigma = 2$, alors un intervalle de confiance de m à α = 5% près est $[\,m_e - 1{,}96\sigma\,;\, m_e + 1{,}96\sigma\,]$

Statistique inférentielle : Test(s) d'hypothèse(s)

I – Objectif, construction et utilisation du test

Objectif: Vérifier l'évolution (ou pas) d'un paramètre p de la population mère à l'aide de la réalisation p_e du même paramètre sur un échantillon fils.

Construction:

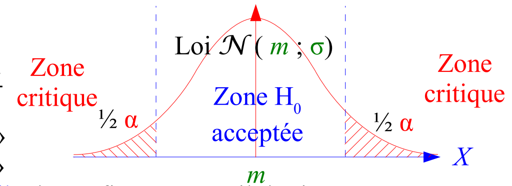
- Définir une variable aléatoire X associée à p_e, variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$,
- Choisir une hypothèse nulle H_0 et alternative H_1,
- Donner un seuil de risque α et l'intervalle I_α associé,
- Énoncer la règle de décision du test:

si $p_e \in I_\alpha$, H_0 est acceptée et si $p_e \notin I_\alpha$, H_0 est refusée.

Utilisation: Calculer le paramètre p_e sur un échantillon fils et appliquer la règle de décision.

II – Test bilatéral et unilatéral (à gauche ou à droite)

Test bilatéral:

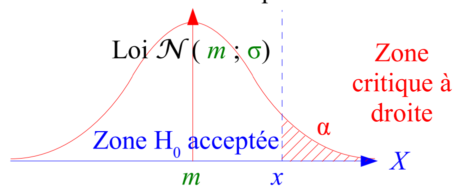


H_0: « $m = m_0$ »

H_1: « $m \ne m_0$ »

I_α est l'intervalle de confiance au seuil de risque α

Test unilatéral: (à droite)



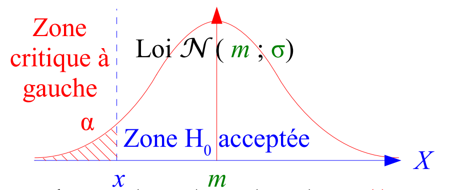
H_0: « $m = m_0$ »

H_1: « $m > m_0$ »

$I_\alpha =]\,-\infty; x\,]$ avec x tel que $P(X \le x) = P(T \le t) = \Pi(t) = 1 - \alpha$.

Voir le calcul de t connaissant $\Pi(t)$ sur A4 loi $\mathcal{N}(0\,;1)$

Test unilatéral: (à gauche)



H_0: « $m = m_0$ »

H_1: « $m < m_0$ »

$I_\alpha = [\,x\,; +\infty\,[$ avec x tel que $P(X \le x) = P(T \le t) = \Pi(t) = \alpha$.

Voir le calcul de t connaissant $\Pi(t)$ sur A4 loi $\mathcal{N}(0\,;1)$