Les complexes

Cercle trigonométrique
+ Pythagore: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

α (°)	0	30	45	60	90
α (rad)	0	π/6	π/4	π/3	π/2
cos α	1	√3/2	√2/2	½	0
sin α	0	½	√2/2	√3/2	1
tan α	1	√3/3	1	√3	

Relation(s) trigonométrique(s)
a et b ∈ ℝ
cos (a + b) = cos a cos b – sin a sin b
sin (a + b) = sin a cos b + cos a sin b
+ cas particulier a = b
cos (2a) = $\cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
sin (2a) = 2 sin a cos a

Résolution de:
a) $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4/2 \Leftrightarrow x = 2$
b) $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = (2)^2 \Leftrightarrow x = \pm 2$
c) $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \times 4 \Leftrightarrow x^2 = i^2 \times 2^2 \Leftrightarrow x = \pm 2 \times i$

Propriété fondamentale de *i* : $i^2 = i \times i = -1$
Le nombre *i* n'est pas réel, c'est un nombre complexe

Le nombre *i* est utilisé pour:
- Équations du 2nd degré avec Δ < 0
- En électricité: il sera noté *j* voir (**)
- En maths pour les équations différentielles
- En géométrie du plan

Équation du 2nd degré: $az^2 + bz + c = 0$; a, b et c ∈ ℝ
Δ = $(b)^2 - 4ac$
Δ = 0 $\Leftrightarrow z_0 = -b / (2a)$
Δ > 0 $\Leftrightarrow z = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / (2a)$
Δ < 0 $\Leftrightarrow$ pas de solution réelle
Δ < 0 $\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{|\Delta|} \Leftrightarrow$ racines complexes

a, b et c ∈ ℂ

Règles sur les puissances de 10
a et b deux entiers $10^0 = 1$
$10^a \times 10^b = 10^{(a+b)}$ $1 \div 10^a = 10^{(-a)}$
$10^a \div 10^b = 10^{(a-b)}$ $(10^a)^b = 10^{(a \times b)}$
Marche aussi avec la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ avec e ≈ 2,71828 et a et b ∈ ℝ

Notions à utiliser ou notions transversales

Équation 2nd degré

Lignes de Niveau

Définition

Exemples

Soit *f* une fonction définie de ℂ vers ℝ. $f(z)$ est un réel. Une **ligne de niveau** est l'ensemble des point M d'affixe *z* du repère orthonormé (0, **i**, **j**) tels que $f(z) = k$ avec *k* une **constante** donnée.

a) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ Si $f(z) = k \Leftrightarrow$ M ∈ à la droite d'équation $x = k$
b) $f(z) = \mathrm{Im}(Z)$ Si $f(z) = k \Leftrightarrow$ M ∈ à la droite d'équation $y = k$
c) $f(z) = |z - z_A|$ Si $f(z) = k > 0 \Leftrightarrow$ M ∈ au cercle centre A et de rayon *k*
d) $f(z) = \arg(z - z_A)$ Si $f(z) = k \Leftrightarrow$ M ∈ demi-droite telle que (**i ; AM**) = *k*

Transformations du Plan

Nom de la transformation T du point M (d'affixe *z*)	Affixe *z'* de M': l'image de M par T
Translation de vecteur **AB** d'affixe $z_B - z_A$	$z' = z + (z_B - z_A)$
Homothétie centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}$ ($k \neq 1$)	$z' = k \times z$
Symétrie centrale (homothétie $k = -1$)	$z' = -z$
Symétrie / (O*x*)	$z' = \bar{z}$
Symétrie / (O*y*)	$z' = -\bar{z}$
Rotation de centre O et d'angle α	$z' = e^{i\alpha} \times z$
Rotation de centre A (affixe z_A) et d'angle α	$z' = e^{i\alpha} \times (z - z_A) + z_A$
Similitude centre O = rotation α + homothétie ρ	$z' = \rho \times e^{i\alpha} \times z$

Formules

Formule	**Moivre**	**Euler**
Expression	$(e^{i\alpha})^n = e^{(i n\alpha)}$ ou $[1 ; \alpha]^n = [1 ; n\alpha]$ Analogie $[10^a]^n = 10^{n \times a}$	$\cos\alpha = ½ (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$ $\sin\alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) / (2i)$
Origine	Puissance n: $(e^{i\alpha} \times e^{i\alpha} \times e^{i\alpha} \times ...)$	+ et – de e iα et e – i α
Utilité	$\cos(nx) = f(\sin(x), \cos(x))$ Racine d'un complexe (EqD 2nd degré)	Linéarisation (utile pour les intégrales)
Exemple	Racine carré de $2e^{i\pi/3} = \sqrt{2}\, e^{i\pi/6}$	$(\cos\alpha)^2$

Historique et utilités

$x = \rho \times \cos\alpha$

$y = \rho \times \sin\alpha$

$\rho = OM$

M (*x* ; *y*)

Définition: Soit *x* et *y* ∈ ℝ, un nombre complexe *z* ou *Z* s'écrit $z = x + y \times i$ avec $i^2 = i \times i = -1$
Notation: L'ensemble des nombres complexe est ℂ

Définition, vocabulaire et notations

Vocabulaire	**Notation**	**Expression**	**Exemple**
Complexe	*z*	$z = x + y\,i$	$z = 1 + 2i$
Partie réelle	Re(*z*)	Re(*z*) = *x*	1
Partie Imaginaire	Im(*z*)	Im(*z*) = *y*	2
Module	|*z*|	$\|z\| = \sqrt{(x^2+y^2)}$	$\|z\| = \sqrt{5}$
Complexe Conjugué	$\bar{z}$	$\bar{z} = x - y\,i$	$\bar{z} = 1 - 2i$

Opérations avec $z = x + y\,i$
$z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 4 - 3i$
Égalité
$\begin{Bmatrix} Z = x + iy \\ Z' = x' + iy' \end{Bmatrix}$; $Z = Z' \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = x' \\ y = y' \end{Bmatrix}$

Opération	**Addition** $z + z'$	**Multiplication**	**Cas** $z \times \bar{z}$
Résultat	$(x + x') + (y + y') \times i$	$(xx' - yy') + (xy' + yx') \times i$	$= x^2 + y^2$
Notation			$z \times \bar{z} = \|z\|^2 = \rho^2$
Exemple	$z_1 + z_2 = 5 - i$	$z_1 \times z_2 = 10 + 5i$	$z_1 \times \bar{z}_1 = 5$

Opération	**Soustraction** $z - z'$	**L'inverse** $1/z$	**Division** z'/z
Résultat	$(x - x') + (y - y') \times i$	$(x - yi) / (x^2 + y^2)$	$(x' + y'i) / (x - yi) / (x^2 + y^2)$
Notation		$1/z = \bar{z} / (z \times \bar{z}) = z / \|z\|^2$	$z'/z = z' \times \bar{z} / \|z\|^2$
Exemple	$z_1 - z_2 = -3 + 5i$	$1 / z_2 = (4 + 3i) / 25$	$z_1 / z_2 = (-2 + 11i) / 25$

Opérations avec $z = \rho \times e^{i\alpha}$
Égalité
$\begin{Bmatrix} Z = \rho \times e^{i\alpha} \\ Z = \rho' \times e^{i\beta} \end{Bmatrix}$; $Z = Z' \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \rho = \rho' \\ \alpha = \beta \end{Bmatrix}$

Opération	**Multiplication**	**Cas** $z \times \bar{z}$
Résultat	$[\rho \times \rho' ; \alpha + \beta]$	$[\rho \times \rho ; \alpha - \alpha] = [\rho^2 ; 0]$
Notation		$z \times \bar{z} = \|z\|^2 = \rho^2$

Opération	**L'inverse** $1/z$	**Division** z'/z
Résultat	$[1 / \rho ; -\alpha]$	$[\rho \div \rho ; \alpha - \beta]$
Notation	$1/z = \bar{z} / (z \times \bar{z}) = z / \|z\|^2$	$z'/z = z' \times \bar{z} / \|z\|^2$

Différentes formes et tableau de correspondance

(**) *Remarque:* J ($z_J = i$) est porté par le vecteur **j** du repère. En électricité, pour éviter la confusion avec le courant, le nombre complexe *i* sera noté *j*

Forme géométrique L'image de *z* est M	**Forme mathématique** L'affixe du point M est *z*	
Point M du plan Repère (0, **i**, **j**)	Notation Algébrique	Notation Exponentielle
M(*x* ; *y*)	$z = x + y \times i$	$z = \rho \times e^{\alpha \times i}$
$OM = \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$	$i^2 = i \times i = -1$(**)	$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i \sin\alpha$
$\alpha = (\mathbf{i};\mathbf{OM})$; $\tan\alpha = y/x$		Une **notation** ou un
$\alpha \in [-\pi;\pi]$ (en rad.) (*)	$\|z\| = \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$	raccourci d'écriture
$x = \rho \times \cos\alpha$	Re(*z*) = *x*	ρ est le module de *z*
$y = \rho \times \sin\alpha$	Im(*z*) = *y*	α est l'argument de Z
symétrique de M / (O*x*)	$\bar{z} = x - y\,i$	$\bar{z} = \rho \times e^{-\alpha \times i}$

(*) *Attention:* la détermination de α avec la calculatrice à partir de $\tan\alpha = y/x$ ne donne que des valeurs de $\alpha \in [-\pi/2 ; \pi/2]$, valables uniquement pour $x > 0$. Pour $x < 0$, il faut ajouter ou retrancher π à la valeur trouvée.

Exemple(s)		
M (*x* ; *y*)	$z = x + y\,i$	$z = \rho \times e^{\alpha \times i}$
J (0 ; 1)	$z = i$ (**)	$z = e^{\pi/2 \times i}$
A (–1 ; 0)	$z = i^2 = -1$	$z = [e^{i\pi/2}]^2 = e^{i\pi}$
B (0 ; –1)	$z = i^3 = -i$	$z = e^{-i\pi/2}$
C (1 ; 0)	$z = i^4 = 1$	$z = e^{i0} = 1$
D (1 ; √3)	$z = 1 + i\sqrt{3}$	$z = 2\, e^{i\pi/3}$
E (–√2/2 ; √2/2)	$z = \sqrt{2}/2 \times (1 + i)$	$z = 1\, e^{i\,3\pi/4}$
F (1 ; 1)	$z = 1 + i$	$z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$
G (1 ; –1)	$z = \bar{z} = 1 - i$	$z = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

(Réalisé par M. Basnary S.)