Exercices de Mathématiques

Thème:

Primitive et calcul intégral

Table des matières

EXERCICE n°1: *Tableau fonction $f \leftrightarrow$ dérivée f' et/ou primitive $F \leftrightarrow$ fonction f.*

Objectif(s): Déterminer l'expression de la dérivée f' et /ou de la primitive F d'une fonction f.

Consigne(s): A vous aidant de l'exemple,

- Compléter la colonne fonction dérivée en utilisant vos formulaires de mathématique.
- Compléter la colonne fonction ou primitive en utilisant la règle de proportionnalité.

Fonction f (x) →	***Dérivée f ' (x)***
Primitive F (x) ←	***Fonction f (x)***

Fonction f (x) →	***Dérivée f ' (x)***
Primitive F (x) ←	***Fonction f (x)***

Fonctions polynômes x^n (n entier $n > 0$)	
Constante b, k ou K	
Fonction $1 \times x$ →	1
$a \times x$ ←	a
Carré: x^2	
	x
Cube: x^3	
	x^2
x^4 ou $x^2 \times x^2$	
	x^3

Règle générale polynômes (n entier $n > 0$)	
x^n →	
←	x^n

Fonctions[1] puissance x^α	
$\sqrt{x} = x^{½}$	
	$1 / \sqrt{x} = x^{-½}$
Inverse: $1 / x = x^{-1}$	
	$1 / x^2 = x^{-2}$
$1 / x^2 = x^{-2}$	
	$1 / x^3 = x^{-3}$
$1 / x^3 = x^{-3}$	
	$1 / x^4 = x^{-4}$

Règle générale puissance α	
$U(x)^\alpha$	
x^α (avec $\alpha \neq 0$) →	
←	x^α (avec $\alpha \neq -1$)

Fonction exponentielle	
e^x ⇄	
e^{ax+b} →	
←	e^{ax+b}
$e^{U(x)}$	

Fonction logarithme	
Fonction $\ln x$ ⇄	
$x \times \ln x - x$	
$\ln (ax + b)$	$a / (ax + b)$
$\ln (U(x))$	

Fonctions trigonométriques simples	
$\cos x$	
$\sin x$ ⇄	
←	$\sin x$
$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x$

Fonctions trigonométriques composées	
$\cos (ax + b)$	
$\sin (ax + b)$	
	← $\cos (ax + b)$
	← $\sin (ax + b)$

1 La dérivée de $\sqrt{x}$ (puissance ½)est $1/ (2\sqrt{x})$ soit $½ x^{-½}$. Les autres fonctions sont du type $1 / U(x)$.

EXERCICE n°2: *Recherche directe de la primitive d'une fonction*

Partie A. Degré de difficulté +

Objectif(s): Déterminer l'expression de la dérivée f' et /ou de la primitive F d'une fonction f.

Consigne(s): A vous aidant du tableau de l' **EXERCICE n°1** et de la propriété de linéarité de la primitive et de la dérivée, compléter la colonne fonction dérivée **puis** compléter la colonne primitive. Pour la primitive, on **fera attention** au nom de la variable (x ou t), de la fonction (f, g ou h) **et** on **rajoutera** la constante d'intégration K. Sur les dernières lignes, on pourra construire deux autres fonctions déterminées au choix.

n°	Primitive + K	Fonction	Fonction dérivée
	Fonctions polynômes x^n (n entier positif $n > 0$)		
1.	$F(x) =$	$f(x) = 4x + 3$	$f'(x) =$
2.		$g(t) = -4t^2 + 8t + 5$	
3.		$h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$	
4.		$f(t) = -2t^3 + 5t - 5$	
5.		$g(x) = 3x^4 - 2x^3 + 6x - 4$	
6.			
7.			
	Fonctions exponentielle et logarithme		
8.		$h(t) = e^{2t+3}$	
9.		$f(x) = e^{-4x-3}$	
10.		$g(t) = e^{-t}$	
11.		$h(x) = 3 \times e^{-2x-4}$	
12.		$f(t) = -2 \times e^{-t+3}$	
13.			
14.			
	Fonctions trigonométriques		
15.		$g(x) = \cos(-2x + \pi/2)$	
16.		$h(t) = 3\sin(50t - \pi/4)$	
17.		$f(x) = -2\cos(4x + \pi/6)$	
18.		$g(t) = -5\sin(100t - \pi/4)$	
19.		$h(x) = 2\cos(4x) + 7\sin(2x)$	

Partie B. Degré de difficulté ++

<u>*Objectif(s):*</u> Déterminer l'expression de la dérivée f' et /ou de la primitive F d'une fonction f.

<u>*Consigne(s):*</u> A vous aidant du tableau de l' **EXERCICE n°1,** de la propriété de linéarité de la primitive et de la dérivée et de vos formulaires de mathématiques, compléter le tableau ci-dessous en donnant sur chaque intervalle I indiqué la primitive de la fonction. Pour la primitive, on **fera attention** au nom de la variable **et** de la fonction **et** on **rajoutera** la constante d'intégration K .

n°	*Intervalle I*	*Fonction*[2]	*Primitive + K*
1.	$I = \mathbb{R}$	$f(x) = x^2 + 4x$	
2.	$I =]-\infty ; +\infty[$	$g(t) = 2e^t + t$	
3.	$I =]-\infty ; +\infty[$	$h(x) = 3e^x - 2e^{-2x}$	
4.	$I =]-\infty ; +\infty[$	$f(t) = -4t^2 + 8t - 5$	
5.	$I =]0 ; +\infty[$	$g(x) = 3/x + 10x$	
6.	$I =]-\infty ; +\infty[$	$h(t) = 5e^t + e^{-2t}$	
7.	$I =]0 ; +\infty[$	$f(x) = -2/x^3 + 3\ln x$	
8.	$I =]-\infty ; +\infty[$	$g(t) = t^2 - 3t$	
9.	$I =]-\infty ; +\infty[$	$h(x) = -2x^3 + 4x - 5$	
10.	$I =]-\infty ; +\infty[$	$f(t) = 4e^t - 2t$	
11.	$I =]-\infty ; +\infty[$	$g(x) = 3x^2 + 5e^x$	
12.	$I =]0 ; +\infty[$	$h(t) = 1/t + 3t$	
13.	$I =]0 ; +\infty[$	$f(x) = x^2 - 2/x^2$	
14.	$I =]0 ; +\infty[$	$g(t) = 3t^2 - 4/t^2$	
15.	$I =]0 ; +\infty[$	$h(x) = 1 + 2/x^2 - 1/x^4$	
16.	$I =]0 ; +\infty[$	$f(t) = t + 2/t$	
17.	$I =]0 ; +\infty[$	$g(x) = 3e^x + 5/x$	
18.	$I =]-\infty ; +\infty[$	$h(x) = 1/(x-2)$	
19.	$I = \mathbb{R}$	$h(t) = t \times \exp(t^2 + 1)$	
20.	$I =]2 ; +\infty[$	$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$	
21.	$I =]-\infty ; +\infty[$	$g(t) = \dfrac{2e^t}{(e^t+1)^2}$	

2 La fonction **n°19.** doit être écrite sous la forme $k \times U' \times \exp(U)$ avant de trouver la primitive. Les fonctions **n° 20.** et **21.** doivent être écrite sous la forme $k \times (\alpha + 1) \times U' \times U^{\alpha}$ avant de trouver leur primitive.

EXERCICE n°3: *Détermination de la valeur de constante d'intégration K*

Objectif(s): Déterminer la valeur de constante d'intégration K à partir d'une condition sur la primitive F de la fonction f du type $F(x_0) = y_0$.

Consigne(s): Pour chaque fonction,

- Déterminer l'expression de la primitive avec la constante K,
- Calculer la valeur de la primitive pour x_0,
- Écrire l'équation vérifiée par K à l'aide de la condition imposée sur la primitive,
- Donner la valeur de K en résolvant cette équation et ré-écrivez la primitive avec la valeur de K.

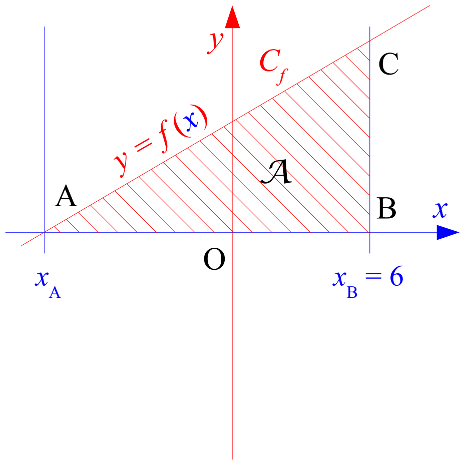
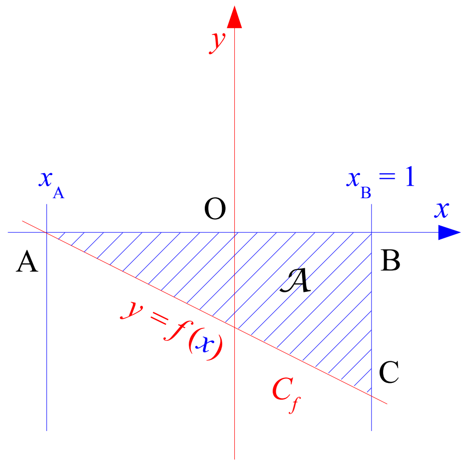
Fonction et I	**1.** $f(x) = x^2 - x + 1$ $I =]-\infty ; +\infty[$	**2.** $g(t) = t - 2/t$ $I =]0 ; +\infty[$	**3.** $h(x) = 2x + 1/x$ $I =]0 ; +\infty[$
Primitive			
Condition	$F(1) = 0$	$G(1) = 0$	$H(2) = 0$
Calcul			
Équation			
$K = ?$			
Primitive			
Fonction et I	**4.** $f(t) = 4t + e^t$ $I =]-\infty ; +\infty[$	**5.** $g(x) = 2/x + e^x$ $I =]0 ; +\infty[$	**6.** $h(t) = ½ e^{-t} + ½ e^t$ $I =]-\infty ; +\infty[$
Primitive			
Condition	$F(0) = 2$	$G(1) = 0$	$H(0) = 1$
Calcul			
Équation			
$K = ?$			
Primitive			
Fonction et I	**7.** $f(x) = 2\cos(3x)$ $I =]-\infty ; +\infty[$	**8.** $g(t) = \sin(2t - \pi/3)$ $I =]-\infty ; +\infty[$	**9.** $h(x) =$ $I =$
Primitive			
Condition	$F(\pi/4) = 0$	$G(\pi/6) = 1$	
Calcul			
Équation			
$K = ?$			
Primitive			

EXERCICE n°4: *Calcul d'aire et calcul intégral*

Partie A. Cas d'un triangle

Objectif(s): Calculer géométriquement l'aire $\mathcal{A}$ des figures délimitées par les points ABC et calculer l'intégrale I indiquée. Comparer les valeurs de $\mathcal{A}$ et de I.

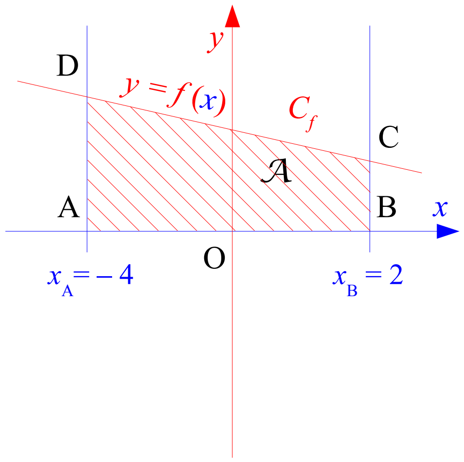
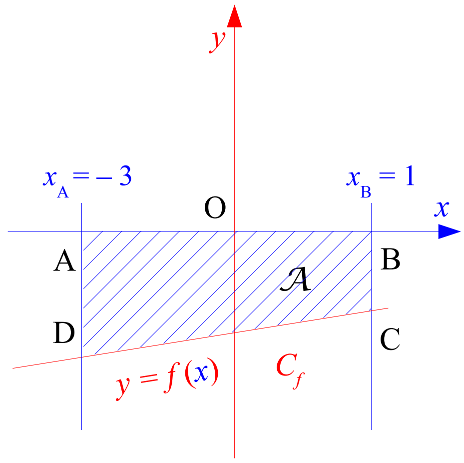
Consigne(s): **Pour** l'aire $\mathcal{A}$: à l'aide de l'expression de la fonction $f(x)$ et des indications sur le repère (Oxy) donner les coordonnées des points ABC. **Pour** I: à l'aide de l'expression de la fonction $f(x)$, donner une primitive $F(x)$ puis la valeur de F aux bornes d'intégrations de l'intégrale x_A et x_B et enfin la valeur de l'intégrale $I = F(x_B) - F(x_A)$

 	Représentat° graphique **(Les figures ne sont pas à l'échelle)**	
$y = f(x) = ½\,x + 2$	Fonct° $f(x)$	$y = f(x) = -x - 3$
	A (x_A ; y_A)	
	B (x_B ; y_B)	
	C (x_C ; y_C)	
	Aire $\mathcal{A}$	
$\int_{x_A}^{x_B} f(x)\,dx = [F(x)]_{x_A}^{x_B} = F(x_B) - F(x_A)$	Intégrale I	$\int_{x_A}^{x_B} f(x)\,dx = [F(x)]_{x_A}^{x_B} = F(x_B) - F(x_A)$
	Bornes	
	Primitive F	
	$F(x_B)$	
	$F(x_A)$	
	I (en u.a.)	
	Comparaison entre $\mathcal{A}$ et I	

Partie B. Cas d'un trapèze

<u>*Objectif(s):*</u> Calculer géométriquement l'aire $\mathcal{A}$ des figures délimitées par les points ABCD et calculer l'intégrale I indiquée. Comparer les valeurs de $\mathcal{A}$ et de I.

<u>*Consigne(s):*</u> **Pour** l'aire $\mathcal{A}$: à l'aide de l'expression de la fonction $f(x)$ et des indications sur le repère (Oxy) donner les coordonnées des points ABC. **Pour** I: à l'aide de l'expression de la fonction $f(x)$, donner une primitive $F(x)$ puis la valeur de F aux bornes d'intégrations de l'intégrale x_A et x_B et enfin la valeur de l'intégrale $I = F(x_B) - F(x_A)$

	Représentat° graphique **(Les figures ne sont pas à l'échelle)**	
$y = f(x) = -x + 5$	Fonct° $f(x)$	$y = f(x) = \frac{1}{2}x - 4$
	Points A et B	
	C (x_C ; y_C)	
	D (x_D ; y_D)	
	Aire $\mathcal{A}$	
$\int_{x_A}^{x_B} f(x)\,dx = [F(x)]_{x_A}^{x_B} = F(x_B) - F(x_A)$	Intégrale I	$\int_{x_A}^{x_B} f(x)\,dx = [F(x)]_{x_A}^{x_B} = F(x_B) - F(x_A)$
	Bornes	
	Primitive F	
	$F(x_B)$	
	$F(x_A)$	
	I (en u.a.)	
	Comparaison entre $\mathcal{A}$ et I	

EXERCICE n°5: *Calcul intégral: cas général*

Partie A. Degré de difficulté +

<u>Objectif(s):</u> Calculer les intégrales I définies par: $I=\int_a^b f(x)\ dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

<u>Consigne(s):</u> A partir de la définition mathématique du calcul d'intégrale I donnée ci-dessus,

- Identifier pour chaque intégrale la fonction $f(x)$ ou $f(t)$ à intégrer,
- Déterminer l'expression d'une primitive $F(x)$ ou $F(t)$ (on prendra $K = 0$),
- Calculer la valeur de la primitive pour les bornes d'intégrations a et b,
- Donner la valeur **exacte** puis **approchée** de l'intégrale I.

On utilisera les fonctionnalités de la calculatrice pour retrouver la valeur approchée obtenue:
<u>CASIO 35+:</u> Graphique: *SHIFT / G-Solv / ∫ dx* ou directement *OPTN / CALC / ∫ dx*($f(x)$, a, b)
<u>TI 83:</u>

Fonction polynômes			
Intégrale I	**1.** $\int_{-1}^{+1}(x^2+2x+1)\,dx$	**2.** $\int_1^2(-t^2+2t+1)\,dt$	**3.** $\int_0^1(x^3-3x-1)\,dx$
$F(x)$ ou $F(t)$			
$F(b)$			
$F(a)$			
I (exacte)			
I (approchée)			
Fonction exponentielle			
Intégrale I	**4.** $\int_0^1 3\,e^{-2t}\,dt$	**5.** $\int_2^4 -\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x+1}\,dx$	**6.** $\int_{-2}^3 2\,e^{\frac{t}{6}-1}\,dt$
$F(x)$ ou $F(t)$			
$F(b)$			
$F(a)$			
I (exacte)			
I (approchée)			
Fonctions trigonométriques (<u>*Aide:*</u> Utiliser le mode radian)			
Intégrale I	**7.** $\int_0^{\pi} -\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\,dx$	**8.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\cos(t-\frac{\pi}{4})\,dt$	**9.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} -2\cos(\frac{x}{2})\,dx$
$F(x)$ ou $F(t)$			
$F(b)$			
$F(a)$			
I (exacte)			
I (approchée)			

Partie B. Degré de difficulté ++

<u>*Objectif(s):*</u> Identique à la *Partie A.* de cet exercice.

<u>*Consigne(s):*</u> Identique à la *Partie A.* de cet exercice.

Intégrale I	**1.** $\int_{-1}^{+1}(x^2+1)\,dx$	**2.** $\int_{-1}^{+1}(t^2+3t+5)\,dt$	**3.** $\int_{1}^{+4}(x+1/x)\,dx$
$F(x)$ ou $F(t)$			
$F(b)$			
$F(a)$			
I (exacte)			
I (approchée)			
Intégrale I	**4.** $\int_{1}^{2}(t^3+\frac{1}{t^2})\,dt$	**5.** $\int_{0}^{1}(x+2-e^x)\,dx$	**6.** $\int_{0}^{\ln 2}(e^t-e^{-t})\,dt$
$F(x)$ ou $F(t)$			
$F(b)$			
$F(a)$			
I (exacte)			
I (approchée)			
Intégrale I	**7.** $\int_{-1}^{2}(x\times(x^2-4))\,dx$	**8.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin t+\sin 2t)\,dt$	**9.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x-\frac{\pi}{4})\,dx$
$F(x)$ ou $F(t)$			
$F(b)$			
$F(a)$			
I (exacte)			
I (approchée)			

EXERCICE n°6: *Calcul d'aire délimitée par deux courbes C_f et C_g*

Objectif(s): Calculer $I=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx=\int_a^b h(x)\,dx=[H(x)]_a^b=H(b)-H(a)$

Consigne(s): Appliquer la formule de calcul de l'aire délimitée par deux courbes aux cas suivants. On utilisera les fonctionnalités de la calculatrice pour représenter le domaine du plan $\mathcal{D}$ compris entre les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ et les deux courbes. (CASIO 35+: *Menu / Graph / Type / X = c* pour les bornes ou *Y* = pour les fonctions) **pour vérifier** quelle courbe est au dessus de l'autre. On fera attention au nom de la variable (x ou t) pour écrire l'intégrale I à calculer.

Fonctions et bornes	**1.** $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ $g(x) = -\frac{1}{2}x - 2$ entre – 2 et 3	**2.** $f(t) = 2t + \frac{1}{2}$ $g(t) = -t - 1$ entre 0 et 1	**3.** $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ $g(x) = x + 3$ entre – 1 et 4
Intégrale I			
Primitive $H(x)$			
$H(b)$			
$H(a)$			
I (u.a.)			
Fonctions et bornes	**4.** $f(t) = t^2 - t - 6$ $g(t) = t - 1$ entre 2 et 3	**5.** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ $g(x) = -\frac{1}{2}x - 2$ entre – 1 et 0	**6.** $f(t) = -t^2 + t + 1$ $g(t) = -t - 2$ entre – 1 et 2
Intégrale I			
Primitive $H(x)$			
$H(b)$			
$H(a)$			
I (u.a.)			
Fonctions et bornes	**7.** $g(x) = x + 3{,}5$ $f(x) = x + 3{,}5 - e(\frac{1}{2}x)$ entre – 1 et 0	**8.** $g(t) = -t + 3{,}5$ $f(t) = -t + 3{,}5 - e(-\frac{1}{2}t)$ entre – 1 et 1	**9.** $g(x) = x - 3{,}5$ $f(x) = x - 3{,}5 + e(-\frac{3}{4}x)$ entre 0 et 1
Intégrale I			
Primitive $H(x)$			
$H(b)$			
$H(a)$			
I (u.a.)			

EXERCICE n°7: *Valeur moyenne μ et valeur efficace f_{eff} d'une fonction f sur* [a ; b]

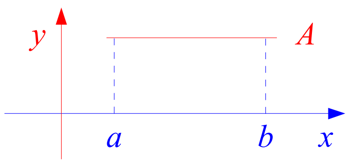
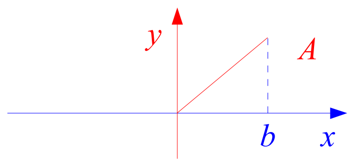
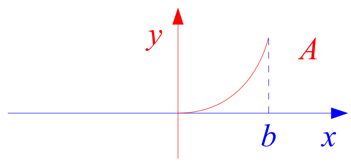
Partie A. Cas de signaux uniforme, triangulaire, et carré

<u>*Objectif(s):*</u> Pour chaque type de signal, calculer les deux valeurs suivantes:

$$\mu = \overline{f} = \frac{1}{b-a} \times I \text{ avec } I = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{et} \quad (f_{eff})^2 = \frac{1}{b-a} \times J \text{ avec } J = \int_a^b f(x)^2\,dx$$

<u>*Consigne(s):*</u> En vous aidant de l'exemple et pour chaque type de signal:

- Déterminer l'expression de la dérivée f' de f et la solution de l'équation $f'(x) = 0$ sur [a ; b]
- Donner les valeurs minimale m et maximale M de la fonction f sur [a ; b]
- Déterminer l'expression de la primitive F de f, puis calculer I et la valeur moyenne µ.
- Déterminer l'expression de $g = f^2$, de sa primitive G, puis calculer J, $(f_{eff})^2$ et la valeur efficace f_{eff}.

Signaux[3]	***Uniforme***	***Rampe ou triangle***	***Carré***
Fonction f	$f(x) = A$	$f(x) = p \times x$ avec $p > 0$	$f(x) = p \times x^2$ avec $p > 0$
Intervalle	[a ; b]	[0 ; b] avec $p \times b = A$	[0 ; b] avec $p \times b^2 = A$
Graphique associé			
Dérivée f'	$f'(x) = 0$		
$f'(x) = 0$	[redacted]		
m	$m = A$		
M	$M = A$		
Primitive F	$F(x) = A \times x$		
$F(b)$	$F(b) = A \times b$		
$F(a)$	$F(a) = A \times a$		
I	$I = A \times (b - a)$		
µ	µ $= A$		
$g = f^2$	$g(x) = A^2$		
Primitive G	$G(x) = A^2 \times x$		
$G(b)$	$G(b) = A^2 \times b$		
$G(a)$	$G(a) = A^2 \times a$		
J	$J = A^2 \times (b - a)$		
$(f_{eff})^2$	$(f_{eff})^2 = A^2$		
f_{eff}	$f_{eff} = A$		

3 Les coefficients A (pour Amplitude), a , b et p (pour pente) sont des constantes.

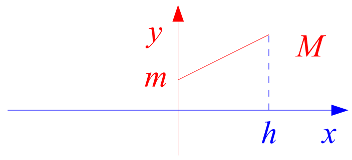
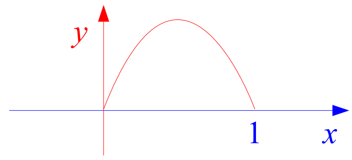
Partie B. Cas de signaux trapézoïdale et parabolique

<u>*Objectif(s):*</u> Pour chaque type de signal, calculer les deux valeurs suivantes:

$$\mu=\overline{f}=\frac{1}{b-a}\times I \text{ avec } I=\int_a^b f(x)\,dx \text{ et } (f_{eff})^2=\frac{1}{b-a}\times J \text{ avec } J=\int_a^b f(x)^2\,dx$$

<u>*Consigne(s):*</u> Pour chaque type de signal:

- Déterminer l'expression de la dérivée f' de f et la solution de l'équation $f'(x) = 0$ sur $[a ; b]$
- Donner les valeurs minimale m et maximale M de la fonction f sur $[a ; b]$
- Déterminer l'expression de la primitive F de f, puis calculer I et la valeur moyenne μ.
- Déterminer l'expression de $g = f^2$, de sa primitive G, puis calculer J, $(f_{\text{eff}})^2$ et la valeur efficace f_{eff}.

Signaux	***Trapézoïdale***[4]	***Parabolique***
Fonction f	$f(x) = p \times x + m$	$f(x) = x \times (1 - x) = x - x^2$
Intervalle	$[0 ; h]$ avec $f(h) = M$ soit $p\,h = M - m$	$[0 ; 1]$
Graphique associé		
Dérivée f'		
$f'(x) = 0$		
m		
M		
Primitive F		
$F(b)$		
$F(a)$		
I		
μ		
$g = f^2$		
Primitive G		
$G(b)$		
$G(a)$		
J		
$(f_{\text{eff}})^2$		
f_{eff}		

4 Montrer que pour ce signal trapézoïdale, avec $p\,h = (M - m)$ on a $\mu = \frac{1}{2}(M + m)$ et $(f_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{3}(M^2 + M\,m + m^2)$. Que deviennent les formules de μ et $(f_{\text{eff}})^2$ si $m = 0$ (signal triangulaire)? Et si $m = M$ (signal uniforme)?

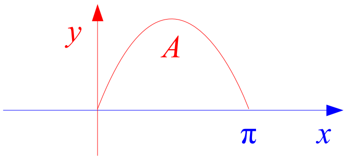
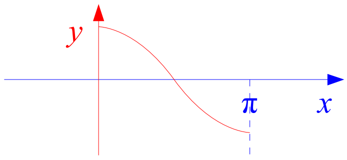
Partie C. Cas de signaux sinusoïdaux: sinus et cosinus

<u>Objectif(s):</u> Pour chaque type de signal, calculer les deux valeurs suivantes:

$$\mu=\overline{f}=\frac{1}{b-a}\times I \ \ avec \ \ I=\int_a^b f(x)\,dx \quad et \quad (f_{eff})^2=\frac{1}{b-a}\times J \ \ avec \ \ J=\int_a^b f(x)^2\,dx$$

<u>Consigne(s):</u> Pour chaque type de signal:

- Déterminer l'expression de la dérivée f' de f et la solution de l'équation $f'(x) = 0$ sur $[\ a\ ;\ b\ ]$
- Donner les valeurs minimale m et maximale M de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$
- Déterminer l'expression de la primitive F de f, puis calculer I et la valeur moyenne μ.
- Déterminer l'expression de $g = f^2$, de sa primitive G, puis calculer J, $(f_{\text{eff}})^2$ et la valeur efficace f_{eff}.

Signaux	***Sinusoïdale[5] redressé***	***Cosinusoïdale***
Fonction f	$f(x) = A \times \sin x$	$f(x) = A \times \cos x$
Intervalle	$[\ 0\ ;\ \pi\ ]$	$[\ 0\ ;\ \pi\ ]$
Graphique associé <u>*(En mode radian)*</u>		
Dérivée f'		
$f'(x) = 0$		
m		
M		
Primitive F		
$F(b)$		
$F(a)$		
I		
μ		
$g = f^2$		
Primitive G		
$G(b)$		
$G(a)$		
J		
$(f_{\text{eff}})^2$		
f_{eff}		

5 Utiliser le formulaire BTS pour exprimer $\sin^2(x)$ et $\cos^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$ avant de chercher la primitive G. Comparer la valeur efficace et l'amplitude. Que constate-t-on pour les deux signaux sinusoïdaux?

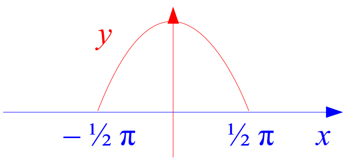
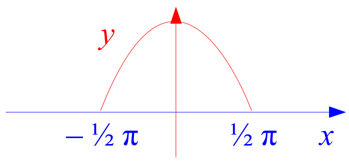
Partie D. Comparaison des courbes, des valeurs moyennes et des valeurs efficaces

<u>*Objectif(s):*</u> Pour chaque type de signal, calculer les deux valeurs suivantes:

$$\mu=\overline{f}=\frac{1}{b-a}\times I \text{ avec } I=\int_a^b f(x)\,dx \text{ et } (f_{eff})^2=\frac{1}{b-a}\times J \text{ avec } J=\int_a^b f(x)^2\,dx$$

<u>*Consigne(s):*</u> Pour chaque type de signal:

- Déterminer l'expression de la dérivée f' de f et la solution de l'équation $f'(x) = 0$ sur $[a ; b]$
- Donner les valeurs minimale m et maximale M de la fonction f sur $[a ; b]$
- Déterminer l'expression de la primitive F de f, puis calculer I et la valeur moyenne μ.
- Déterminer l'expression de $g = f^2$, de sa primitive G, puis calculer J, $(f_{\text{eff}})^2$ et la valeur efficace f_{eff}.

Signaux	***Cosinusoïdale alternance positive***	***Parabolique***
Fonction f	$f(x) = \cos x$	$f(x) = 1 - (4/\pi^2) \times x^2$
Intervalle	$[-½\pi ; ½\pi]$	Même intervalle
Graphique associé <u>*(En mode radian)*</u>		
Dérivée f'		
$f'(x) = 0$		
m		
M		
Primitive F		
$F(b)$		
$F(a)$		
I		
μ		
$g = f^2$		
Primitive G		
$G(b)$ <u>*Aide*[6]*:*</u>		
$G(a)$		
J		
$(f_{\text{eff}})^2$		
f_{eff}		

6 Pour $G(a)$: comme $a = -b$ et G est impaire, on a $G(a) = G(-b) = -G(b)$ soit $G(a)$ est l'opposé de $G(b)$.

EXERCICE n°8: *Volume de révolution d'une fonction f autour de l'axe (Ox)*

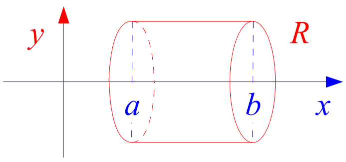
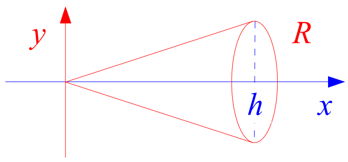
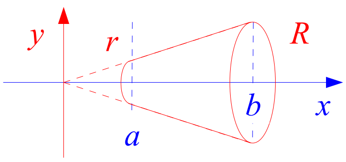
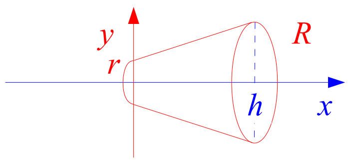
Partie A. Cas de volumes usuels: cylindre, cône, cône tronqué et trapézoloïde

<u>*Objectif(s):*</u> Pour chaque type de volume, calculer l'intégrale suivante:

$$V=\int_a^b v(x)\,dx=[V(x)]_a^b=V(b)-V(a)\ \text{avec}\ v(x)=\pi\times f(x)^2$$

<u>*Consigne(s):*</u> En vous aidant de l'exemple et pour chaque type de volume:

- Déterminer géométriquement l'expression V_g du volume usuel.
- Donner l'expression de $v(x) = \pi f(x)^2$, puis l'expression de sa primitive $V(x)$, de $V(b)$ et de $V(a)$
- Donner l'expression de V et comparer sa valeur à V_g .

Volume	***Cylindre***	***Cône***
Fonction f	$f(x) = R$	$f(x) = p \times x$
Intervalle	$I = [a ; b]$ et $h = b - a$	$I = [0 ; h]$ et $p \times h = R$
Graphique associé		
V_g	$V_g = \pi R^2 \times h$	
$v = \pi f^2$	$v(x) = \pi R^2$	
V	$V(x) = \pi R^2 \times x$	
$V(b)$	$V(b) = \pi R^2 \times b$	
$V(a)$	$V(a) = \pi R^2 \times a$	
V	$V = \pi R^2 \times (b - a) = \pi R^2 \times h = V_g$	
Volume	***Cône tronqué***	***Trapézoloïde***[7]
Fonction f	$f(x) = p \times x$	$f(x) = p \times x + r$
Intervalle	$I = [a ; b]$ et $p = r / a$ ou $p = R / b$	$I = [0 ; h]$ et $p \times h = R - r$
Graphique associé		
V_g		$V_g = ⅓\, \pi h (R^2 + R r + r^2)$
$v = \pi f^2$		
V		
$V(b)$		
$V(a)$		
V		

7 Montrer qu'avec $p h = R - r$, on retrouve $V = V_g = ⅓\, \pi h (R^2 + R r + r^2)$

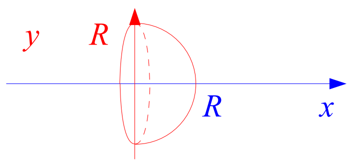
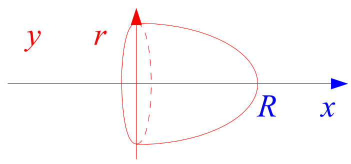
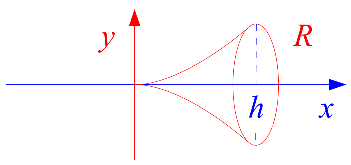
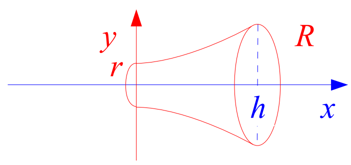
Partie B. Cas de volumes: sphère, ellipsoïde, paraboloïde et colonne de refroidissement.

<u>*Objectif(s):*</u> Pour chaque type de volume, calculer l'intégrale suivante:

$$V=\int_a^b v(x)\,dx=[V(x)]_a^b=V(b)-V(a) \ \ avec \ \ v(x)=\pi\times f(x)^2$$

<u>*Consigne(s):*</u> En vous aidant de l'exemple et pour chaque type de volume:

- Déterminer géométriquement l'expression V_g du volume usuel.
- Donner l'expression de $v(x) = \pi f(x)^2$, puis l'expression de sa primitive $V(x)$, de $V(b)$ et de $V(a)$
- Donner l'expression de V et comparer sa valeur à V_g .

Volume	***½ Sphère (ballon de foot)***	***½ Ellipsoïde (ballon de rugby)***
Fonction f	$f(x) = \sqrt{(R^2 - x^2)}$	$f(x) = r \times \sqrt{(1 - x^2 / R^2)}$
Intervalle	$I = [0 ; R]$	$I = [0 ; R]$
Graphique associé		
V_g		
$v = \pi f^2$		
V		
$V(b)$		
$V(a)$		
V		
Volume	***Paraboloïde (cor de chasse)***	***Colonne de refroidissement***[8]
Fonction f	$f(x) = p \times x^2$	$f(x) = r \times e^{px}$ avec $p \neq 0$
Intervalle	$I = [0 ; h]$ et $p = R / h^2$	$I = [0 ; h]$ et $r\,e^{ph} = R$ soit $e^{ph} = R / r$
Graphique associé		
V_g		
$v = \pi f^2$		
V		
$V(b)$		
$V(a)$		
V		

8 Montrer qu'avec $\exp(2\,p\,h) = \{\exp(p\,h)\}^2 = (R / r)^2$, on retrouve $V = V_g = ½\,\pi / p \times (R^2 - r^2)$.

EXERCICE n°9: *Centre d'inertie G d'une pièce homogène à 2 dimensions*

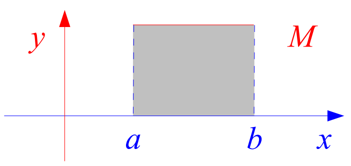
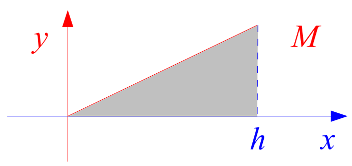
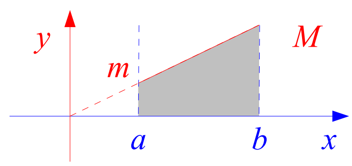
Partie A. Cas de pièces usuelles: rectangulaire, triangulaire et triangulaire tronquée

<u>Objectif(s):</u> Déterminer les coordonnées du centre d'inertie G à l'aide de la formule suivante:

$$G\left(x_G=\frac{I_x}{I_S}\,;\,y_G=\frac{I_y}{I_S}\right)\ avec\ I_S=\int_a^b f(x)\,dx\ ;\ I_x=\int_a^b x\,f(x)\,dx\ \ et\ \ I_y=\int_a^b \frac{1}{2}f(x)^2\,dx$$

<u>Consigne(s):</u> En vous aidant de l'exemple et pour chaque type de pièce:

- Déterminer intuitivement les coordonnées de G.
- Déterminer l'expression de la primitive F de f, puis calculer I_S.
- Déterminer l'expression de $u(x) = x \times f(x)$, de sa primitive $U(x)$, puis calculer I_x.
- Déterminer l'expression de $v(x) = ½\, f(x)^2$, de sa primitive $V(x)$, puis calculer I_y.
- Déterminer les coordonnées exactes de G. Comparer avec l'intuition.

Pièce	*Rectangulaire*	*Triangulaire*	*Triangulaire tronquée*
Fonction f	$f(x) = M$	$f(x) = p \times x$ avec $p > 0$	$f(x) = p \times x$
Intervalle	$I = [\,a\,;\,b\,]$ et $h = b - a$	$I = [\,0\,;\,h\,]$ et $p \times h = M$	$[\,a\,;\,b\,]$ et $p = m\,/\,a = M\,/\,b$
Graphique associé			
$G = ?$	$x_G = ½\,(\,b + a)\,;\,y_G = ½\,M$		
F	$F(x) = M \times x$		
$F(b)$	$F(b) = M \times b$		
$F(a)$	$F(a) = M \times a$		
I_S	$I_S = M \times (\,b - a\,) = M\,h$		
$u = x \times f$	$u(x) = M \times x$		
U	$U(x) = ½\,M \times x^2$		
$U(b)$	$U(b) = ½\,M \times b^2$		
$U(a)$	$U(a) = ½\,M \times a^2$		
I_x	$I_x = ½\,M\,(\,b + a\,)\,(\,b - a\,)$		
$v = ½\,f^2$	$v(x) = ½\,M^2$		
V	$V(x) = ½\,M^2 \times x$		
$V(b)$	$V(b) = ½\,M^2 \times b$		
$V(a)$	$V(a) = ½\,M^2 \times a$		
I_y	$I_y = ½\,M^2 \times (\,b - a\,)$		
$G = ?$	$x_G = ½\,(\,b + a)\,;\,y_G = ½\,M$		

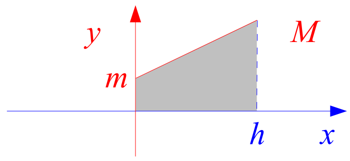
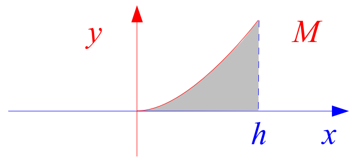
Partie B. Cas de pièces trapézoïdale et générée par la fonction carré

Objectif(s): Déterminer les coordonnées du centre d'inertie G à l'aide de la formule suivante:

$$G\left(x_G=\frac{I_x}{I_S}\,;\,y_G=\frac{I_y}{I_S}\right)\ avec\ I_S=\int_a^b f(x)\,dx\ ;\ I_x=\int_a^b x\,f(x)\,dx\ \ et\ \ I_y=\int_a^b \frac{1}{2}f(x)^2\,dx$$

Consigne(s): En vous aidant de l'exemple et pour chaque type de pièce:

- Déterminer l'expression de la primitive F de f, puis calculer I_S.
- Déterminer l'expression de $u(x) = x \times f(x)$, de sa primitive $U(x)$, puis calculer I_x.
- Déterminer l'expression de $v(x) = \frac{1}{2} f(x)^2$, de sa primitive $V(x)$, puis calculer I_y.
- Déterminer les coordonnées exactes de G.

Pièce	***Trapézoïdale***[9]	***Générée par la fonction carré***
Fonction f	$f(x) = p \times x + m$	$f(x) = p \times x^2$
Intervalle	$I = [\,0\,;\,h\,]$ et $p\,h = M - m$	$I = [\,0\,;\,h\,]$ et $p \times h^2 = M$
Graphique associé		
$G = ?$		
F		
$F(b)$		
$F(a)$		
I_S		
$u = x \times f$		
U		
$U(b)$		
$U(a)$		
I_x		
$v = \frac{1}{2} f^2$		
V		
$V(b)$		
$V(a)$		
I_y		
$G = ?$		

9 Montrer qu'avec $p\,h = M - m$, on retrouve $I_S = \frac{1}{2}\,h\,(\,M + m\,)$, on trouve $I_x = \frac{1}{3}\,h^2\,(\,M + \frac{1}{2}\,m\,)$ et on trouve pour I_y (voir le volume du trapézoloïde) la valeur $I_y = 1/6\,h^2\,(\,M^2 + M\,m + m^2\,)$. Que deviennent les expressions des trois intégrales dans le cas où $m = M$ (pièce rectangulaire) puis dans le cas où $m = 0$ (pièce triangulaire)?

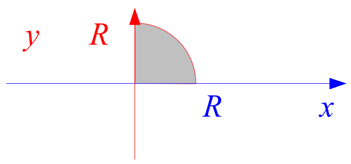
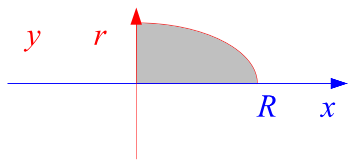
Partie C. Cas de pièces ¼-circulaire et ¼-elliptique

<u>Objectif(s):</u> Déterminer les coordonnées du centre d'inertie G à l'aide de la formule suivante:

$$G\left(x_G=\frac{I_x}{I_S}\,;\,y_G=\frac{I_y}{I_S}\right)\ avec\ I_S=\int_a^b f(x)\,dx\ ;\ I_x=\int_a^b x\,f(x)\,dx\ et\ I_y=\int_a^b \frac{1}{2}f(x)^2\,dx$$

<u>Consigne(s):</u> En vous aidant de l'exemple et pour chaque type de pièce:

- Déterminer intuitivement les coordonnées de G.
- Déterminer l'expression de la primitive F de f, puis calculer I_S.
- Déterminer l'expression de $u(x) = x \times f(x)$, de sa primitive $U(x)$, puis calculer I_x.
- Déterminer l'expression de $v(x) = ½\,f(x)^2$, de sa primitive $V(x)$, puis calculer I_y.
- Déterminer les coordonnées exactes de G. Comparer avec l'intuition.

Pièce	***¼-circulaire***[10]	***¼-elliptique***
Fonction f	$f(x) = \sqrt{(R^2 - x^2)}$	$f(x) = r \times \sqrt{(1 - x^2 / R^2)}$
Intervalle	$I = [\,0\,;R\,]$	$I = [\,0\,;R\,]$
Graphique associé		
$G = ?$		
F	[redacted]	[redacted]
$F(b)$	[redacted]	[redacted]
$F(a)$	[redacted]	[redacted]
I_S		$I_S = ¼\,\pi\,r\,R$
$u = x \times f$		
U		
$U(b)$		
$U(a)$		
I_x		
$v = ½\,f^2$		
V		
$V(b)$		
$V(a)$		
I_y		
$G = ?$		

10 Que peut-on dire des valeurs de x_G et de y_G ? Donner la valeur de I_S qui est l'aire du quart de cercle. Pourquoi seul le calcul de I_y est nécessaire. Sinon, pour calculer I_x. mettre la fonction $u(x)$ sous la forme $k \times (\alpha + 1) \times h' \times h^{\alpha}$ avec $h(x) = (R^2 - x^2)$ et $\alpha = ½$ (fonction racine carré) avant de donner sa primitive $U = k \times h^{(\alpha+1)}$.