Primitive et calcul intégral

(Auteur : M. Basnary S. – Version 2014)

Primitive $F(x)$; Fonction $y = f(x)$; fonction dérivée $f'(x)$

I – Primitive d'une fonction f

- <u>Définition:</u> On appelle primitive d'une fonction f sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ toute fonction F dérivable sur I telle que la fonction dérivée F' est égale à f.

F est une primitive de f sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

- Tableau $f \to f'$ ou $F \leftarrow f$: (λ et $\mu \in \mathbb{R}$)

fonction $f \to$ dérivée f'	
primitive $F \leftarrow$ fonction f	
b, k, ou K	0
x	1
$a \times x + K$	a
$½ \times x^2$	x
$1/(\alpha+1) \times x^{\alpha+1}$	x^α $(\alpha \neq -1)$
$\ln x$	$x^{-1} = 1/x$

fonction $f \to$ dérivée f'	
primitive $F \leftarrow$ fonction f	
e^{x}	e^{x}
$e^{(ax+b)}$	$a \times e^{(ax+b)}$
$(1/a) \times e^{(ax+b)}$	$e^{(ax+b)}$
$(1/a) \times \sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$(-1/a) \times \cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\lambda U + \mu V$	$\lambda u + \mu v$

- <u>Ensemble des primitives d'un fonction f :</u> Si F est une primitive de f sur I alors $\forall K \in \mathbb{R}$, toute fonction $F + K$ est aussi une primitive de f sur I. K est appelée la constante d'intégration (On choisit souvent $K = 0$).

II – Intégrale d'une fonction f sur $I = [\,a\,;\,b\,]$

- <u>Définition:</u> Soit f une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, a et b deux réels tels que a et $b \in I$ et F une primitive de f sur I, on appelle intégrale de a à b le nombre **réel** I tel que: $I = F(b) - F(a)$. Les autres notations pour I sont:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = [\,F(x)\,]_a^b = F(b) - F(a)$$

où: a et b sont les bornes d'intégrations,
$\int$, dx , [et] sont les symboles du calcul intégral.

- Interprétation graphique en termes d'aires: cf. Figure.

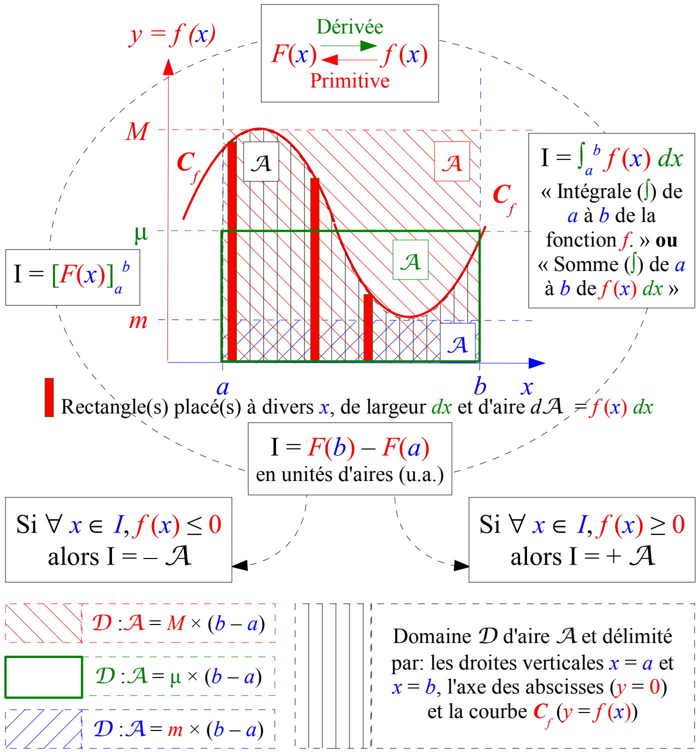
- Propriétés: (λ et $\mu \in \mathbb{R}$)

Positivité: Si $\forall x \in I, f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
Invers°: $\int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(x)\,dx$
Chasles: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$
Linéarité: $\int_a^b (\lambda\, u(x) + \mu\, v(x))\,dx = \lambda \int_a^b u(x)dx + \mu \int_a^b v(x)dx$

- Aire entre deux courbes C_f et C_g :
Si les limites supérieures et inférieures de $\mathcal{D}$ sont les fonctions $y = f(x)$ et $y = g(x)$ alors :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx = [H(x)]_a^b = H(b) - H(a)$$

<u>*Remarques:*</u> Si $y = g(x) = 0$ (Axe (Ox)), on retrouve I **et** $h(x)$ représente la hauteur d'un rectangle de largeur dx.



III – Formules déduites

- Inégalité de la moyenne, valeur moyenne et efficace:
Si $\forall x \in I$, on a $m \leq f(x) \leq M$ alors (cf. Figure)
$m \times (b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \times (b - a)$

Valeur et notation	Notation et expression
moyenne μ ou $\bar{f}$	$\mu = 1 / (b - a) \times \int_a^b f(x)\,dx$
efficace f_{eff}	$(f_{eff})^2 = 1 / (b - a) \times \int_a^b (f(x))^2\,dx$

<u>*Remarque:*</u> μ est telle que l'aire $\mu \times (b - a) = \mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$.
On reverra la notation μ ou $\bar{f}$ sur les séries statistiques ($\bar{x}$).

- Autre notation pour la primitive F de la fonction f :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = [\,F(t)\,]_a^x = F(x) - F(a)$$

avec F : primitive de la fonction f sans constante K.
F_a : primitive de la fonction f qui s'annule en $x = a$.
<u>*Ex:*</u> $\ln(x) = \int_1^x (1/t)\,dt$ (Aire sous la courbe $1/t$ entre 1 et x)

IV – Application(s) du calcul intégral

- Calcul d'aire simple ou d'aire entre 2 courbes C_f et C_g.
- Calcul de valeur moyenne μ et de valeur efficace f_{eff}.
- Calcul de centre d'inertie G (pièce 2D homogène):

$$G\,(\,x_G = I_x / I\ ;\ y_G = I_y / I\,) \text{ avec } I = \mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$$
$$I_x = \int_a^b (x \times f(x))\,dx\ ;\ I_y = \int_a^b (½\, f(x) \times f(x))\,dx$$

- Volume d'un solide de révolution autour de (Ox):

$$V = \int_a^b (\,\pi \times f(x) \times f(x))\,dx \quad \text{(V en unités de volume)}$$

- Notation(s) différentielle(s):
$d\mathcal{A} = f(x)\,dx$ (aire), $dV = \pi \times f(x)^2\,dx$ (volume), ...

V – Méthode(s) de calcul intégral

- Par recherche directe d'une primitive F de f : cf. tableau

- Par **vérification**:

F et f sont données. Il faut vérifier que $F'(x) = f(x)$

<u>*Ex:*</u> Vérifier que $F(x) = (-½\,x - ¼) \times e^{-2x}$ est une primitive de $f(x) = x \times e^{-2x}$. F est de la forme $u \times v$ donc:

$u(x) = (-½\,x - ¼)$	Dérivée $\to$	$u'(x) = -½$
$v(x) = e^{-2x}$	Dérivée $\to$	$v'(x) = -2\,e^{-2x}$

$F'(x) = u' \times v + u \times v' = -½ \times e^{-2x} + (-½\,x - ¼) \times (-2)\,e^{-2x}$
$F'(x) = -½ \times e^{-2x} + (\,x + ½\,) \times e^{-2x} = x \times e^{-2x} = f(x)$
On vient de vérifier que F est bien une primitive de f.

- Par **intégration par parties**: (avec la même fonction f)

<u>*Rappel:*</u> $u' \times v + u \times v' = (u \times v)'$
donc $u \times v' = (u \times v)' - u' \times v$
et $\int_a^b u(x) \times v'(x)\,dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x)\,dx$

<u>*Ex:*</u> $I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x \times e^{-2x}\,dx$ avec $a = 0$ et $b = 1$.

a) Identification u et v' et recherche de u' et v

$u(x) = x$	Dérivée $\to$	$u'(x) = 1$
$v(x) = -½\,e^{-2x}$	$\leftarrow$ Primitive	$v'(x) = e^{-2x}$

b) Formulaire et recherche de la primitive du 2nd terme.
Cette primitive s'obtient à l'aide du tableau de l'étape **a)**.
$I = \int_a^b x \times e^{-2x}\,dx = [x \times (-½\,e^{-2x})]_a^b - \int_a^b 1 \times (-½\,e^{-2x})\,dx$
$I = \int_a^b x \times e^{-2x}\,dx = [x \times (-½\,e^{-2x})]_a^b - [(-½) \times (-½)\,e^{-2x}\,]_a^b$

c) Regroupement des termes entre [] et simplification.
$I = \int_a^b x \times e^{-2x}\,dx = [-½\,x \times e^{-2x} - (+¼) \times e^{-2x})]_a^b$
$I = \int_a^b x \times e^{-2x}\,dx = [(-½\,x - ¼) \times e^{-2x}\,]_a^b = [\,F(x)\,]_a^b$

<u>*Remarque:*</u> L'étape **c)** donne la primitive de $f(x) = x \times e^{-2x}$, c'est la fonction $F(x) = (-½\,x - ¼) \times e^{-2x}$.

d) Calcul final de $I = F(b) - F(a)$ avec a et b données.
$F(b) = -¾\,e^{-2}$, $F(a) = -¼$, $I = ¼ - ¾\,e^{-2} \approx 0{,}148$ u.a.