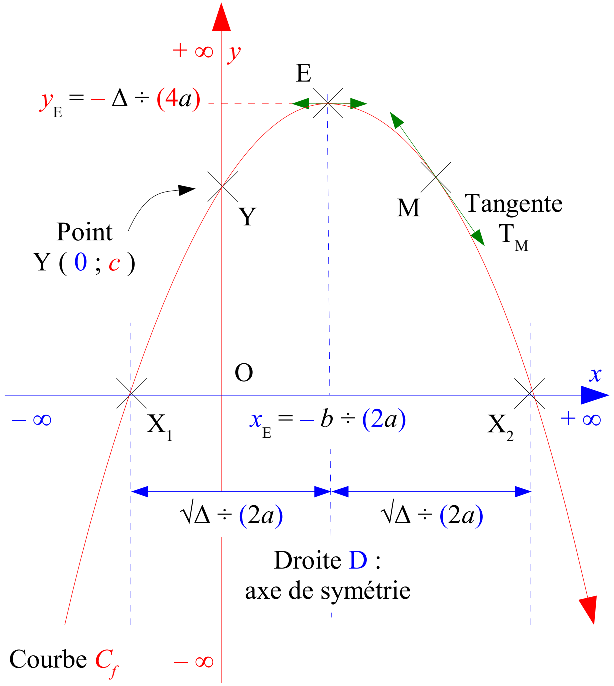
Étude de la fonction polynôme

$y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

y : ordonnée (image de x), x : abscisse (antécédent de y)

(Auteur: M. Basnary S. – Version 2012)



La courbe C_f admet un axe de symétrie : la droite verticale D passant par le point E.

I – Courbure ou forme de la courbe C_f

(*Donnée(s):* a)

Signe de a	Courbure	Forme C_f
+ ou $a > 0$	Positive	En ∪
– ou $a < 0$	Négative	En ∩

II – Fonction dérivée $f\,'$ et étude du signe de $f\,'(x)$

(*Donnée(s):* *fonction* f)

a) Fonction dérivée $f\,'$ de f

$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

$f\,'(x) = a \times 2x + b \times 1 + 0$

$f\,'(x) = 2a \times x + b$

$f\,'$ est une fonction affine

b) Solution de $f\,'(x) = 0$

$f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow 2a \times x + b = 0$

$\Leftrightarrow x_E = -b \div (2a)$

c) Signe de $f\,'(x) = 2a \times x + b$

D'après le tableau de signe de la fonction affine:

$f\,'(x) = 2a \times x + b$ est de signe de $2a$ pour $x > -b \div (2a)$ soit $x > x_E$.

III – Informations des points E et Y

(*Donnée(s):* *fonction* f)

Pts	E	Y
x	$x_E = -b \div (2a)$	$x_Y = \mathbf{0}$
$f\,'(x)$	**0**	$f\,'(x) = b$
y	$y_E = -\Delta \div (4a)$	$y_Y = c$

IV – Solution(s) de $y = f(x) = 0 \Leftrightarrow a\,x^2 + b\,x + c = 0$

Discriminant ou delta : $\Delta = (b)^2 - 4 \times a \times c$

Signe de Δ	Nombre de solutions	Notions et expressions[1] des solutions	
+	2	x_1 et x_2	$(-b \pm \sqrt{\Delta}) \div (2a)$
0	1	$x_1 = x_2 = x_E$	$-b \div (2a)$
–	0	Aucune solution réelle[2]	

Propriété(s): $x_1 + x_2 = -b \div a$ et $x_1 \times x_2 = c \div a$

1 L'expression de x_E n'est qu'un cas particulier du calcul de x_1 et x_2 lorsque $\Delta = 0$. Dans ce cas, les trois points X_1, E et X_2 sont confondus.

2 Aucune solution réelle mais deux solutions complexes notées z_1 et z_2.

V – Zéro(s) et tableau de variation[3]

Pts	X_1	Y	E	X_2
x		**0**		
$f\,'(x)$			**0**	
y ou f	**0**			**0**

Propriété(s): Pour les points X_1 et X_2, $f\,'(x_1) = -f\,'(x_2) = \pm\sqrt{\Delta}$

3 L'existence (X_1 et X_2) et/ou l'ordre des points peut être différents.

VI – Équation de la tangente T_M à la courbe C_f au point M (x_M ; y_M)

a) Équation T_M : $y = a\,x + b$

b) Informations au point M

Pts	M	Nom
x	x_M	Abscisse
$f\,'(x)$	$f\,'(x_M) = p$	Pente
y	y_M	Ordonnée

La pente p de la tangente T_M est le nombre dérivé au point M: c'est à dire la valeur de la fonction dérivée $f\,'$ calculée au point M soit $p = f\,'(x_M)$

c) Ordonnée à l'origine b de T_M droite passant par M (x_M ; y_M) et de pente $a = p = f\,'(x_M)$:

$y_M = a \times x_M + b$

$b = y_M - a \times x_M$

d) Équation(s) de T_M :

T_M : $y = a\,x + b$

T_M : $y = f\,'(x_M) \times x + b$

T_M : $y = f\,'(x_M) \times (x - x_M) + y_M$

VII – Tableau de signe de $y = a\,x^2 + b\,x + c$

Point		X_1		X_2		Nom
x	$-\infty$	x_1		x_1	$+\infty$	Abscisse
Signe de $y = ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	Ordonnée

Règle: Le signe de $y = a\,x^2 + b\,x + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2 (c'est à dire des solutions de $a\,x^2 + b\,x + c = 0$) lorsque ces solutions existent.

Remarque(s):

- Coordonnées des points X_1 et X_2 , sur l'axe (Ox)

Les ordonnées y des points X_1 et X_2 sont $y = 0$.

Les abscisses x des points X_1 et X_2 vérifient l'équation :

$y = 0 \Leftrightarrow a\,x^2 + b\,x + c = 0 \Leftrightarrow x = (-b \pm \sqrt{\Delta}) \div (2a)$

avec le discriminant ou delta : $\Delta = (b)^2 - 4 \times a \times c$

- Résoudre une inéquation du type $a\,x^2 + b\,x + c > 0$ (ou bien < 0) se fait de la manière suivante:

a) Recherche des solutions de $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

b) Remplissage du tableau de signe.

c) Solution sous forme d'intervalle.

Pour $-x^2 + x + 6 < 0$. $\Delta = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ et $a = -1$ donc solution $I =]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$

VIII – Tableau de variation de $y = a\,x^2 + b\,x + c$

Point		E		Nom
x	$-\infty$	$-b/2a$	$+\infty$	Abscisse
$f\,'(x) = a$	Signe $-a$	0	Signe a	Pente
y ou f	$+\infty$ / $-\infty$	$-\Delta/4a$	$+\infty$ (si $a > 0$) / $-\infty$ (si $a < 0$)	Variation
Signe y ou signe f	Défini à partir de l'existence des racines x_1 et x_2 .			Signe y ou signe f

Remarque(s):

- Fonction dérivée: $f\,'(x) = 2a \times x + b$
- Informations du point E, extremum de la courbe :

Sa pente p (ou nombre dérivé) est **nulle** (par propriété)

Son abscisse x est tel que $f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow x_E = -b \div (2a)$.

Son ordonnée y est telle que $y_E = f(x_E) = -\Delta \div (4a)$.