# Extraits de sujets d'examens

**Thème:**

## Étude de fonction – Développement limité – Calcul intégral

## Table des matières

## Descriptif des sujets d'examens

| | Type de fonction | | | DL | Calcul d'intégral | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| EXERCICE | Polynôme | exp ou logarithme | Trigo | Ordre + étude | Directe ou DL | Vérificat° $F'(x) = f(x)$ | $F$ à l'aide de $(E)$ | Par parties |
| 2013_Gr_C | $(2t - 0{,}05) \times e^{-t}$ | | | | | X | | |
| 2012_Gr_C | $13 \times (1 - e^{-½ t})$ | | | | Moyenne | | | |
| 2011_Gr_C | $(2x + 1)\, e^{-x} + 2$ | | | | X | X | | |
| 2010_Gr_C | | X | | | Entre 2 | | | |
| 2009_Gr_C | | | | | | | | |
| 2008_Gr_C | | X | | | X | | | |
| 2007_Gr_C | | 2 études | | | | | | |
| 2006_Gr_C | | X | | | Entre 2 | | | |
| 2005_Gr_C | | X | | | X | | | |
| 2013_Gr_B | $(0{,}25\, x) \times e^{-0{,}125\, x^2}$ | | | étude | | X | | |
| 2012_Gr_B | $(1 - 5x) \times e^{-2x}$ | | | 2 + étude | | | | X |
| 2011_Gr_B | $(2x - 1) \times e^{x} + 3$ | | | 2 + étude | X | | | X |
| 2010_Gr_B | $(x + 1)\, e^{x} + 2x + 2$ | | | 2 + étude | X | | | X |
| 2009_Gr_B | $(4x^2 - 4) \times e^{x}$ | | | 2 + étude | X | X | X | |
| 2008_Gr_B | $e^{2x} - (x + 1)\, e^{x}$ | | | 2 | X | | | X |
| 2007_Gr_B | | X | | 2 + étude | | | | X |
| 2006_Gr_B | $f(x) = (x + 2)\, e^{-x}$ | | | 3 + étude | | | | X |
| 2005_Gr_B | $U \div V$ | | | 2 + étude | X | X | | |
| 2013_CPI | $2\, e^{-2x} \sin(x) + 2x - 1$ | | | 2 + étude | | | | |
| 2012_CPI | $(-150 \cos(16t) - 112{,}5 \sin(16t))\, e^{-12t} + 150$ | | | 2 + étude | | | | |
| 2011_CPI | | $1 + e^{x} - ½ \cos x$ | | 2 + étude | | | | |
| 2010_CPI_1 | $(x^2 + 2x + 3)\, e^{x}$ | | | 2 + étude | | | | |
| 2010_CPI_2 | | X | | | Volume | | | |
| 2009_CPI | | X | | 2 + étude | X | | | |
| 2008_CPI_1 | $(x^2 + 4x + 3)\, e^{-x}$ | | | 2 + étude | | | | |
| 2008_CPI_2 | $(a x + b)\, e^{-x}$ | | | | | | | X |
| 2007_CPI_1 | | $2\, e^{-x} \times \sin ½ x.$ | | 2 + étude | | | | |
| 2007_CPI_2 | $f(x) = 2\, e^{-½ x} \sqrt{x}$ | | | | | | | Volume |
| 2006_CPI | | $U \times V$ | | 3 + étude | | | | |
| 2005_CPI | $g(x) = -x\, e^{-x}$ | | | 3 + étude | X | | | X |

**EXERCICE 2013_Gr_C:** *(Extrait du sujet groupement C – Session 2013)*

**Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.**

Dans une entreprise, lors d'une intervention sur la sécurité routière, on s'intéresse au taux d'alcool dans le sang. Dans cet exercice, ce taux sera utilisé sans précision de l'unité.

*Partie A. Taux d'alcool, deux exemples*

Le tableau suivant donne les quantités d'alcool contenues dans certaines boissons alcoolisées.

| Consommation | Quantité d'alcool (en g) |
|---|---|
| Un verre de 25 cl de bière | 13 g |
| Un verre de 10 cl de vin | 8 g |
| Une flûte de champagne | 8 g |
| Un verre de 4 cl de whisky | 13,2 g |
| Un verre de 5 cl d'apéritif | 9 g |

Environ une heure après ingestion, on peut estimer le taux $T$ d'alcool dans le sang d'une personne, en fonction de <u>*sa masse*</u> $P$, en kilogrammes, de la quantité d'alcool ingérée $Q$, en grammes, et d'un coefficient de diffusion $K$, à l'aide la formule :

$$T=\frac{Q}{P\times K}$$

On admet que $K = 0{,}7$ pour les hommes et $K = 0{,}6$ pour les femmes.

**1.** A l'aide de la formule, estimer le taux d'alcool dans le sang, environ une heure après ingestion, d'un homme de 75 kg ayant consommé une verre de 25 cl de bière, deux verres de 10 cl de vin et une flûte à champagne.

**2.** Estimer la quantité d'alcool ingérée par une femme de 55 kg dont le taux d'alcool mesuré est 0,5 une heure après ingestion.

*Partie B. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie C. Lectures graphiques*

Une personne a ingéré une certaine quantité d'alcool. On s'intéresse à l'évolution du taux d'alcool dans le sang de cette personne, en fonction du temps $t$, en heures.

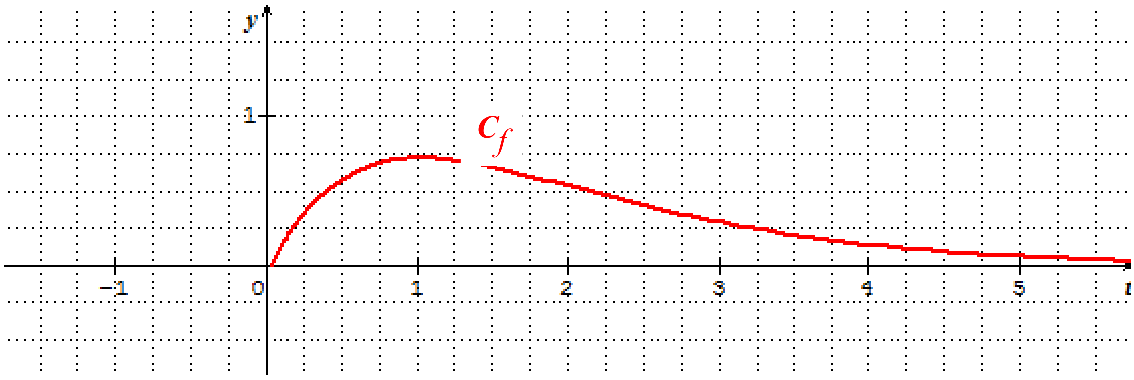
Compte tenu du délai d'absorption par l'organisme, le taux d'alcool dans le sang de cette personne est donné par la fonction $f$ définie sur $[\ 0{,}025\ ;\ +\infty\ [$ par :

$$f(t) = (\ 2\,t - 0{,}05\ ) \times \mathrm{e}^{-t}$$

La représentation graphique $\boldsymbol{C}_f$ de la fonction $f$ dans un repère orthonormal est fournie ci-dessous.

**1.** Déterminer, à l'aide du graphique ci-dessus, pendant combien de temps le taux d'alcool dans le sang de cette personne reste supérieur à 0,5.

**2.** Déterminer, à l'aide du graphique, à quel instant le taux est maximum et donner ce maximum.




*Partie D. Étude d'une fonction*

<u>*Rappel(s) :*</u> La fonction $f$ est définie sur $[\ 0{,}025\ ;+\infty\ [$ par : $f(t) = (\ 2\ t - 0{,}05\ ) \times e^{-t}$

**1.** On désigne par $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Montrer que :

$$f\,'(t) = (\ 2{,}05 - 2\ t\ ) \times e^{-t}$$

**2.** Étudier le signe de $f\,'(t)$ et en déduire la valeur exacte du maximum de la fonction $f$.

**3.** Démontrer que la fonction $F$ définie sur $[\ 0{,}025\ ;+\infty\ [$ par :

$$F(t) = (-2\ t - 1{,}95) \times e^{-t}$$

est une primitive de la fonction $f$ sur $[\ 0{,}025\ ;+\infty\ [$.

**4.** On considère $T_m = \frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\ dt$ . $T_m$ est le taux d'alcool moyen entre les instants $t = 2$ et $t = 4$.

Calculer la valeur exacte de $T_m$ et en donner une valeur arrondie à 0,01 près.

**EXERCICE 2012_Gr_C:** *(Extrait du sujet groupement C – Session 2012)*

**Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.**

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude de fonction*

On considère la fonction $f$ définie sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$ par $f(t) = 13 \times (\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\ )$.

Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative $\boldsymbol{C}$ de la fonction $f$ est représentée sur la graphique joint en **annexe 1** à rendre avec la copie.

**1.** Soit $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$. Déterminer l'expression de $f'(t)$.

**2.** Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$.

**3.** Démontrer que $\boldsymbol{C}$ admet une asymptote horizontale $\boldsymbol{D}$ dont on précisera une équation.

**4.** Déterminer une équation de la tangente $\boldsymbol{T}$ à $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse $x = 0$.
Tracer $\boldsymbol{T}$ sur le graphique joint en **annexe 1** à rendre avec la copie.

*Partie C. Calcul intégral*

On admet que la vitesse de chute de la boule à l'instant $t$ est égale à $f(t)$. La vitesse est exprimée en mm/s et le temps est donné en secondes.

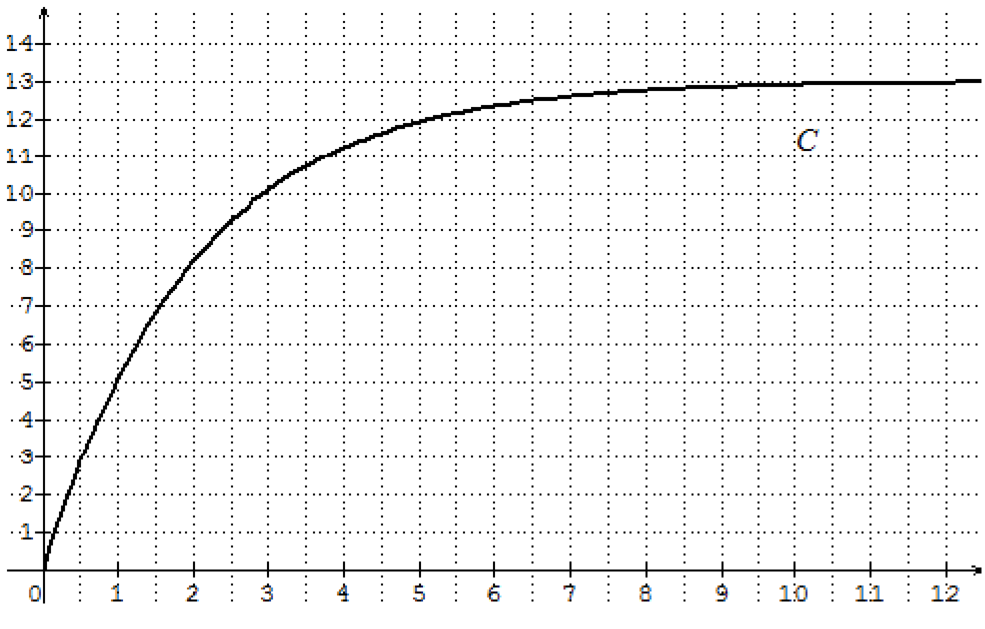
**1.** Déterminer graphiquement à partir de quel instant la vitesse de chute de la boule dépasse 10 mm/s.

**2.** Retrouver le résultat précédent par le calcul.

**3.** Calculer la vitesse moyenne $V_m$ de chute de la boule entre les instants $t = 2$ et $t = 4$. On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée à 0,01 près.

On rappelle que $V_m = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 f(t)\ dt$

**Annexe 1**



**EXERCICE 2011_Gr_C:** *(Extrait du sujet groupement C – Session 2011)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude de fonction*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1) \times e^{-x} + 2$.

On note $\boldsymbol{C}$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

La courbe $\boldsymbol{C}$ est représentée **en annexe** qui devra être rendue avec la copie.

**1.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $-\infty$.

**2.** Limite et asymptote

**a)** En écrivant $f(x) = 2x\,e^{-x} + e^{-x} + 2$, déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

**b)** En déduire l'existence d'une asymptote $\boldsymbol{D}$ à $\boldsymbol{C}$ dont on donnera une équation.

**c)** Tracer $\boldsymbol{D}$ sur le graphique fourni en annexe.

**3.** Dérivée

**a)** On appelle $f'$ la fonction dérivé de $f$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout réel $x$, on a $f'(x) = (1 - 2x) \times e^{-x}$.

**b)** Étudier les variations de la fonction $f$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

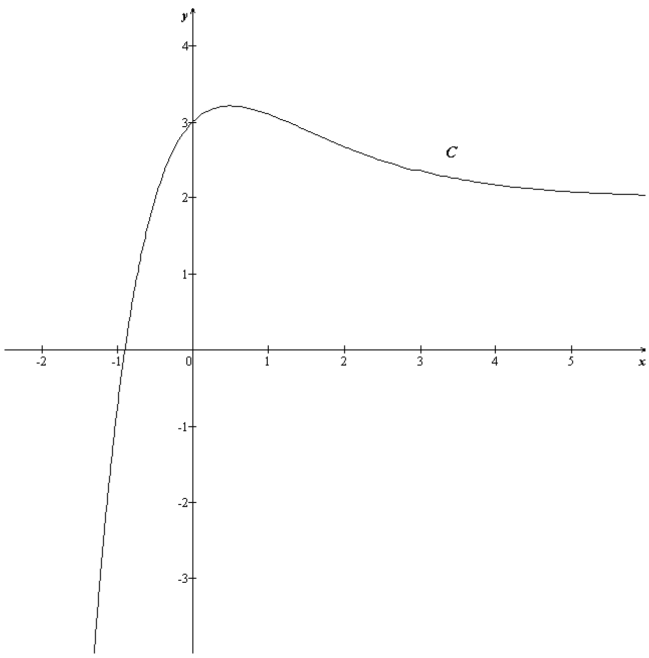
**4.** Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x - 3) \times e^{-x} + 2x$.

**a)** Vérifier que $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**b)** Calculer la mesure $\boldsymbol{A}$, en cm$^2$, de l'aide du domaine délimité par la courbe $\boldsymbol{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de $\boldsymbol{A}$.

*<u>Aide(s):</u> Délimiter et hachurer le domaine associé. Estimer son aire. Écrire l'intégrale associée avant de faire le calcul. Pensez au facteur de conversion u.a. ↔ cm $^2$.*

*<u>Aide(s):</u> Repère pour la représentation graphique de **D** (l'échelle n'est pas respectée).*



**EXERCICE 2010_Gr_C:** *(Extrait du sujet groupement C – Session 2010)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude de fonction*

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$.

On note $\boldsymbol{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

**1.**

**a)** Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

**b)** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**c)** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

**2.**

**a)** Montrer que la droite $\boldsymbol{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\boldsymbol{C}$ au voisinage de $+\infty$.

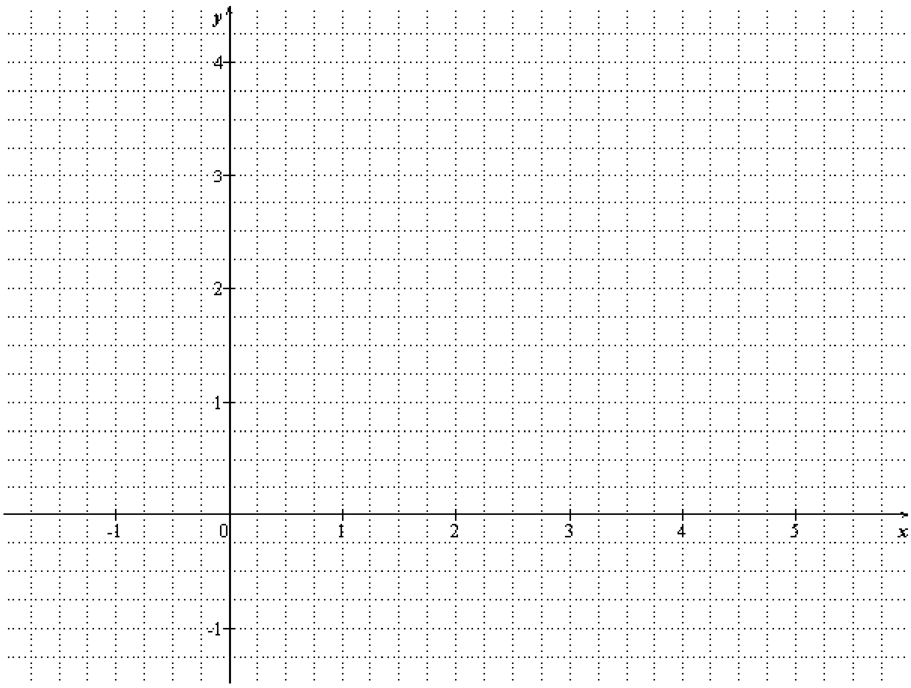
**b)** Étudier la position de la courbe $\boldsymbol{C}$ par rapport à la droite $\boldsymbol{D}$.

**3.** Tracer l'asymptote $\boldsymbol{D}$ et la courbe $\boldsymbol{C}$.

**4.** Calculer $\int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et en déduire l'aire $\boldsymbol{A}$, en $\mathrm{cm}^2$, de la partie du plan délimitée par la courbe $\boldsymbol{C}$, la droite $\boldsymbol{D}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. On donnera la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au centième de l'aire $\boldsymbol{A}$.

*<u>Aide(s):</u> Délimiter et hachurer le domaine associé. Estimer son aire. Écrire l'intégrale associée avant de faire le calcul. Pensez au facteur de conversion u.a. ↔ cm $^2$.*

*<u>Aide(s):</u> Repère pour la représentation graphique de **C** et de **D** (l'échelle n'est pas respectée).*



**EXERCICE 2008_Gr_C:** *(Extrait du sujet groupement C – Session 2008)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude de fonction*

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$ par $f(t) = 25\ (\ 1 - e^{-2t})$.

On donne sur la feuille *annexe*, à remettre avec la copie, la représentation graphique $\boldsymbol{C}$ de la fonction $f$ dans un repère orthogonal.

La fonction $f$ représente la fonction vitesse déterminée dans la partie *A*.

**Le but de l'exercice est de justifier et de compléter la représentation graphique de la fonction *f* donnée en *annexe*.**

**1.**

**a)** Par lecture graphique, déterminer une valeur arrondie au dixième de l'instant $t_0$ où la vitesse dépasse 20 m.s$^{-1}$.

**b)** Résoudre l'inéquation $f(t) > 20$. En déduire la valeur exacte de $t_0$.

**2.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

**3.** Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$.

**4.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point O, origine du repère.
Construire cette droite sur l'*annexe* à remettre avec la copie.

**5.** En utilisant le graphique donné en *annexe*, estimer l'aire en unités d'aire de la partie du plan compris entre la courbe $\boldsymbol{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 1$ et $t = 2$.

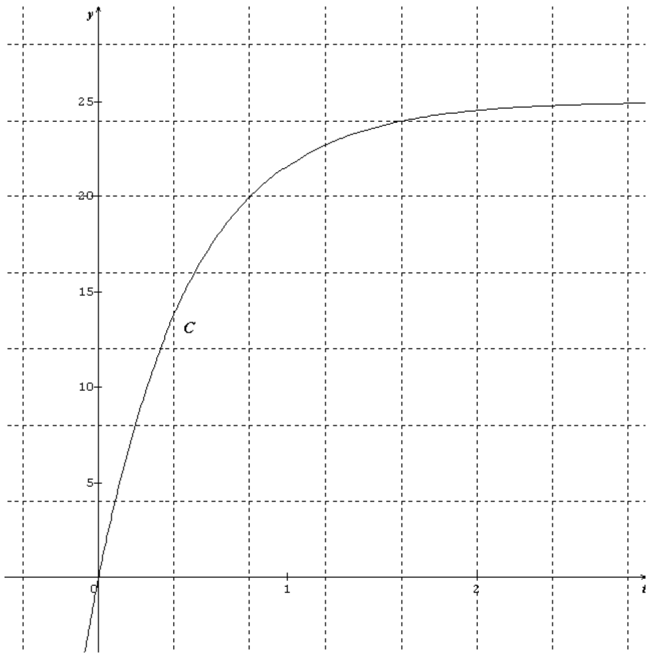
**6.** Calcul intégral.

**a)** Déterminer une primitive $F$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$.

**b)** Calculer l'intégrale $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. En donner une interprétation graphique.

*<u>Aide(s):</u> Délimiter et hachurer le domaine associé. Estimer son aire. Écrire l'intégrale associée avant de faire le calcul. Pensez au facteur de conversion u.a. $\leftrightarrow$ cm$^2$.*

*<u>Aide(s):</u> Repère pour la représentation graphique de **C** et de **D** (l'échelle n'est pas respectée).*



**EXERCICE 2007_Gr_C:** *(Extrait du sujet groupement C – Session 2007)*

Le but du problème est l'étude de la demande et de l'offre pour un nouveau produit de grande consommation. Une étude statistique a donné les résultats suivants où:

- $x$ désigne le prix unitaire en euros du produit,
- $y$ désigne la demande (la quantité de produit demandée par les consommateurs), en milliers d'unités.
- $z$ désigne l'offre (la quantité de produit offerte sur le marché par les producteurs), en milliers d'unités.

| $x$ en euros | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ en milliers | 7,8 | 6,1 | 4,7 | 3,7 | 3 | 2,5 | 2,2 | 2 |
| $z$ en milliers | 0,9 | 1,4 | 1,7 | 1,9 | 2,1 | 2,3 | 2,4 | 2,6 |

*Partie A. Étude de la demande : Résolution d'une équation différentielle (...)*

**1.** On appelle $d$ la fonction demande, en milliers d'unités pour un prix de $x$ euros, définie sur l'intervalle [ 0,5 ; 4 ] par $y = d(x)$. On admet que, pour tout $x$ de l'intervalle [ 0,5 ; 4 ], on a :

$$d(x) = 15\,e^{-0,4x} + x - 5.$$

**a)** Soit $d'$ la fonction dérivée de la fonction $d$. Déterminer $d'(x)$ et en déduire les variations de la fonction $d$ sur l'intervalle [ 0,5 ; 4 ].

**b)** Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées. On admet que le tableau de valeurs ci-dessus est le tableau de valeurs de la fonction $d$ définie par $y = d(x)$.
Construire la courbe $\boldsymbol{C}_d$ représentative de la fonction $d$ sur l'intervalle [ 0,5 ; 4 ].

*Partie B. Étude de l'offre (...)*

**1.** On appelle $h$ la fonction offre, en milliers d'unités pour un prix de $x$ euros, définie sur l'intervalle [ 0,5 ; 4 ] par $z = h(x)$. On admet que, pour tout $x$ de l'intervalle [ 0,5 ; 4 ], on a :

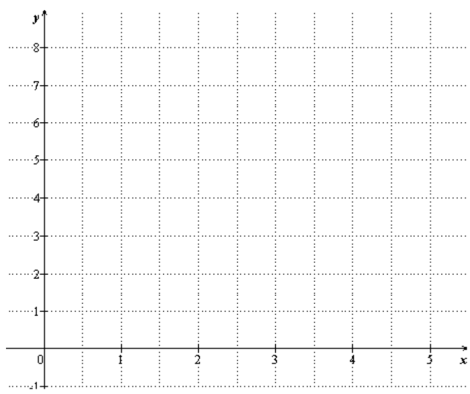
$$h(x) = \ln(3x + 0,9)$$

**a)** Soit $h'$ la fonction dérivée de la fonction $h$. Déterminer $h'(x)$ et en déduire les variations de la fonction $h$ sur l'intervalle [ 0,5 ; 4 ].

**b)** Construire la courbe $\boldsymbol{C}_h$ représentative de la fonction $h$ dans le même repère que la courbe $\boldsymbol{C}_d$. *On pourra utiliser le tableau de valeurs ci-dessus.*

**c)** Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée du prix de vente en euros, à 10 centimes près, pour lequel la demande est égale à l'offre.

*<u>Aide(s):</u> Repère pour la représentation graphique de $\boldsymbol{C}_d$ et $\boldsymbol{C}_h$ (l'échelle n'est pas respectée).*



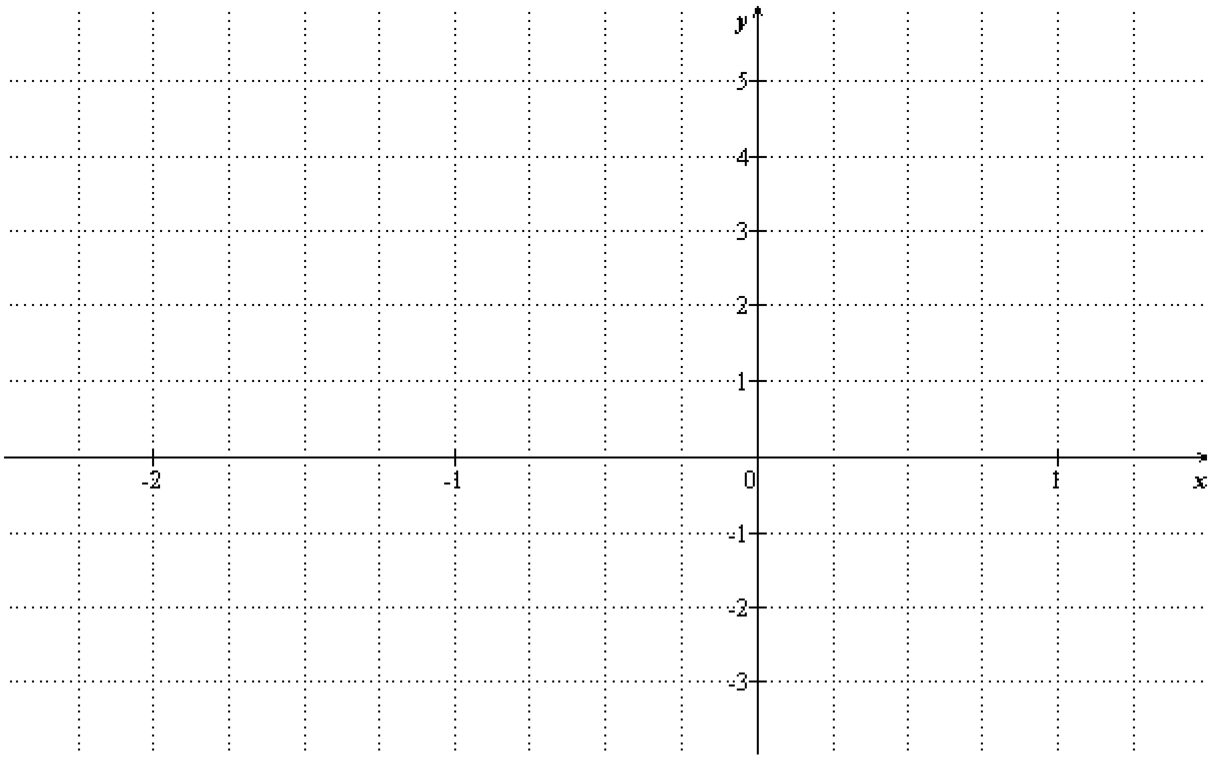
**EXERCICE 2006_Gr_C:** *(Extrait du sujet groupement C – Session 2006)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude d'une fonction*

Soit la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ par $f(x) = e^{3x} - x - 2$.

*<u>Aide(s):</u> Repère pour la représentation graphique de **C** et de **D**.*




**1.** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.

**2.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**3.** Étudier les variations de la fonction $f$ et dresser son tableau de variation sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

**4.** Soit ***C*** la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm pour 1 unités sur l'axes des abscisses et 1 cm pour 1 unités sur l'axe des ordonnées.
Montrer que la courbe ***C*** admet pour asymptote le droite ***D*** d'équation $y = -x - 2$ au voisinage de $-\infty$.

**5.** Déterminer les positions relatives de la courbe ***C*** et de la droite ***D*** selon les valeurs de $x$.

**6.** Tracer ***D*** et ***C***.

*Partie C. Calcul intégral*

Calculer l'aire ***A***, en cm$^2$, du domaine compris entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$, la droite ***D*** et la courbe ***C***. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de ***A***.

*<u>Aide(s):</u> Délimiter et hachurer le domaine associé. Estimer son aire. Écrire l'intégrale associée avant de faire le calcul. Pensez au facteur de conversion u.a. ↔ cm$^2$.*

**EXERCICE 2005_Gr_C:** *(Extrait du sujet groupement C – Session 2005)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude d'une fonction*

Soit la fonction $f$, définie pour tout réel $x$ par $f(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

**1.** Limites

**a)** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.

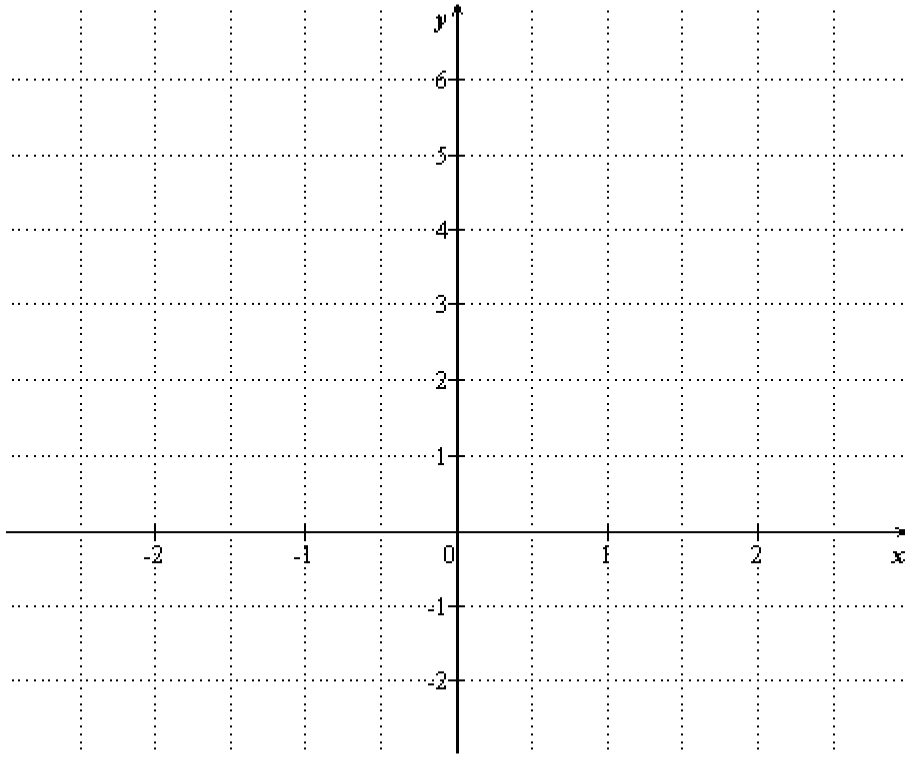
**b)** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ (on pourra mettre $2x$ en facteur dans l'expression de $f(x)$).

**2.** Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$. Déterminer $f'(x)$.

**a)** Étudier le signe de $f'(x)$.

**b)** En déduire les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ et le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel $x$.

*Aide(s): Repère pour la représentation graphique de **C** et de **D**.*




*Partie C. Calcul intégral*

On note ***C*** la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

**1.** Montrer que la droite ***D*** d'équation $y = -2x - 1$ est asymptote à la courbe ***C*** au voisinage de $-\infty$.

**2.** Construire la courbe ***C*** et la droite ***D***.

**3.** On considère l'aire ***A*** du domaine plan délimité par la courbe ***C***, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer la valeur exacte de ***A*** au $cm^2$, puis en donner l'approximation décimale arrondie au centième.

*Aide(s): Délimiter et hachurer le domaine associé. Estimer son aire. Écrire l'intégrale associée avant de faire le calcul. Pensez au facteur de conversion u.a. ↔ $cm^2$.*

**EXERCICE 2013_Gr_B:** *(Extrait du sujet groupement B – Session 2013)*

**Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.**

Dans cet exercice, on étudie des fonctions intervenant dans les prévisions sur la vitesse moyenne du vent pour l'implantation d'éoliennes.

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude d'une fonction*

Soit $f$ la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = (\,0{,}25\,x\,) \times \mathrm{e}^{-0{,}125\,x^2}$.

On désigne par $\boldsymbol{C}$ sa courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

**1.** *Les questions* **a)** *et* **b)** *suivantes sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
*La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est égale à :

| | | |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |

**b)** En $+\infty$ la courbe $\boldsymbol{C}$ admet une asymptote d'équation :

| | | |
|---|---|---|
| $y = -0{,}125\,x^2$ | $y = 0$ | $x = 0$ |

**2.** Soit $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.

**a)** Démontrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$,

$$f'(x) = 0{,}0625\,(\,2 + x\,)\,(\,2 - x\,)\,\mathrm{e}^{-0{,}125\,x^2}.$$

**b)** En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

**c)** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

**3.** Un logiciel de calcul formel fournit le développement limité de la fonction $f$, à l'ordre 3, au voisinage de zéro :

$$f(x) = 0{,}25\,x - 0{,}03125\,x^3 + x^3\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \longrightarrow 0.$$

**Ce résultat est admis et n'est donc pas à démontrer.**

**a)** En déduire une équation de la tangente $T$ à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0.

**b)** Étudier la position relative de $T$ et de $\boldsymbol{C}$ au voisinage du point d'abscisse 0, pour $x$ positif.

*Partie C. Application à l'étude de la vitesse du vent*

**1.** Soit $F$ la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}125\,x^2}$.

**a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

**b)** Démontrer que $F$ est une primitive sur $[\,0\,;+\infty\,[$ de la fonction $f$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = (\,0{,}25\,x\,) \times \mathrm{e}^{-0{,}125\,x^2}.$$

**2.** Calculer $I = \int_1^6 f(x)\,\mathrm{d}x$. Donner la valeur approchée du résultat arrondie à $10^{-2}$.

*Le résultat précédent donne la probabilité, qu'une journée donnée, la vitesse moyenne du vent soit comprise entre 1 m/s et 6 m/s.*

**EXERCICE 2012_Gr_B:** *(Extrait du sujet groupement B – Session 2012)*

**Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.**

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude locale d'une fonction*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - 5x) \times e^{-2x}$. On note $\boldsymbol{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

**1.** On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} -5x\,e^{-2x} = 0$.

**a)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

**b)** *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

La courbe $\boldsymbol{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont une équation est :

| | | |
|---|---|---|
| $y = 1 - 5x$ | $y = 0$ | $x = 0$ |

**2.** Développement limité

**a)** A l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \to e^{t}$, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction :

$$x \to e^{-2x}$$

**b)** En déduire que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

$$f(x) = 1 - 7x + 12x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

**c)** En déduire une équation de la tangente $T$ à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0.

**d)** *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\boldsymbol{C}$ est au-dessus de la droite $T$. Recopier sur votre copie la justification exacte.

| | | |
|---|---|---|
| $12x^2$ est positif au voisinage de 0. | $x^2\,\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0. | $1 - 7x$ est positif au voisinage de 0. |

*Partie C. Calcul intégral*

**1.** On note $I = \int_1^2 f(x)\,dx$, où $f$ est la fonction définie dans la *Partie B*.

**a)** Démontrer, à l'aide d'une intégration par partie, que $I = \dfrac{23\,e^{-4} - 13\,e^{-2}}{4}$

**b)** Donner la valeur approchée de $I$ arrondie à $10^{-2}$ près.

**c)** Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ pour $x$ dans l'intervalle $[\,1\,;\,2\,]$

**d)** Interpréter graphiquement le nombre $I$.
*Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.*

**EXERCICE 2011_Gr_B:** *(Extrait du sujet groupement B – Session 2011)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude d'une fonction et calcul intégral.*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1) \times e^x + 3$. On note $\boldsymbol{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

**1.** On admet le résultat suivant : la limite de $e^x$ est égale à zéro lorsque $x$ tend vers moins l'infini.

**a)** Calculer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend moins l'infini.

**b)** En déduire que la courbe $\boldsymbol{C}$ admet une droite asymptote dont on donnera une équation.

**2.** Développement limité

**a)** Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

$$f(x) = 2 + x + 1{,}5\,x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

**b)** En déduire une équation de la tangente $T$ à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0.

**c)** *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\boldsymbol{C}$ est au-dessus de la droite $T$. Recopier sur votre copie la justification exacte.

| | | |
|---|---|---|
| $1{,}5\,x^2$ est positif au voisinage de 0. | $x^2\,\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0. | $x + 2$ est positif au voisinage de 0. |

**3.** On admet que la fonction dérivée $f$ est donnée, pour tout $x$ réel, par : $f'(x) = (2x + 1)\,e^x$ .

**a)** Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $f'(x)$ puis en déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**b)** Donner la valeur approchée arrondie à 0,01 du minimum de la fonction $f$.

**4.** Calcul intégral

**a)** On note $I = \int_0^{0{,}5} (2 + x + 1{,}5\,x^2)\,dx$.

Démontrer que $I = 1{,}1875$

**b)** On note $K = \int_0^{0{,}5} (2x - 1) \times e^x\,dx$.

Démontrer, à l'aide d'une intégration par partie, que $K = 3 - 2\,e^{0{,}5}$.

**c)** On note $J = \int_0^{0{,}5} f(x)\,dx$.
En utilisant la question précédente, déterminer la valeur exacte de $J$.

**d)** Vérifier que $J - I$ est inférieur à $2 \times 10^{-2}$.

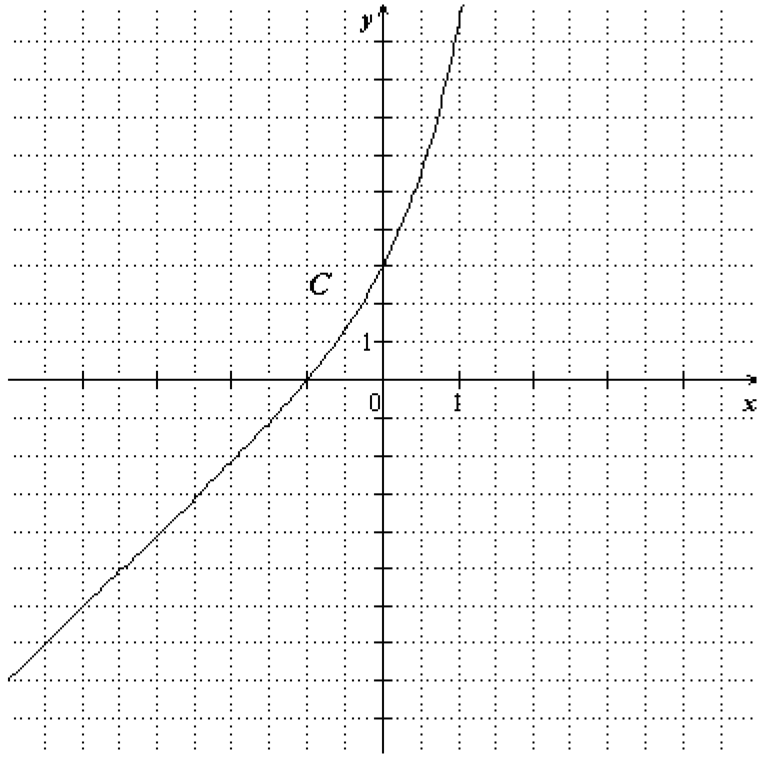
**EXERCICE 2010_Gr_B:** *(Extrait du sujet groupement B – Session 2010)*

**Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendantes**

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude d'une fonction*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1) \times e^{x} + 2x + 2$. Sa courbe représentative $\boldsymbol{C}$ est donnée dans le repère orthogonal ci-dessous.




**1.** Calculer la limite de la fonction $f$ pour $x$ qui tend vers plus l'infini

**2.** *Pour cette question, une seule réponse A, B ou C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse de rapporte ni n'enlève de point.*

La courbe $\boldsymbol{C}$ admet une asymptote en $-\infty$ dont une équation est :

| Réponse *A* | Réponse *B* | Réponse *C* |
|---|---|---|
| $y = x + 1$ | $y = 2x + 2$ | $y = 2$ |

*Aide(s): Tracer les trois droites avant de répondre.*

**3.** Développement limité

**a)** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

$$f(x) = 3 + 4x + 1{,}5x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

*Pour les questions* **3. b)** *et* **3. c)***, une seule réponse A, B ou C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse de rapporte ni n'enlève de point.*

**b)** Une équation de la tangente $T$ à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0 est :

| Réponse $A$ | Réponse $B$ | Réponse $C$ |
|---|---|---|
| $y = 3$ | $y = 3 + 4x$ | $y = 1{,}5\,x^2$ |

*<u>Aide(s):</u> Tracer les trois fonctions avant de répondre.*

**c)** Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe ***C*** est :

| Réponse $A$ | Réponse $B$ | Réponse $C$ |
|---|---|---|
| au-dessus de la tangente $T$ pour tout $x$. | au-dessous de la tangente $T$ pour tout $x$. | au-dessous de la tangente $T$ quand $x < 0$ et au-dessus quand $x > 0$. |

*Partie C. Calcul intégral*

**1.** On note $I = \int_{-1}^{1} ( 2x + 2 )\, dx$.

Montrer que $I = 4$

**2.** On note $J = \int_{-1}^{1} ( x + 1 ) \times e^x\, dx$.

Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que $J = e + e^{-1}$.

**3.** On note $K = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$, ou $f$ est la fonction définie dans la partie $B$.

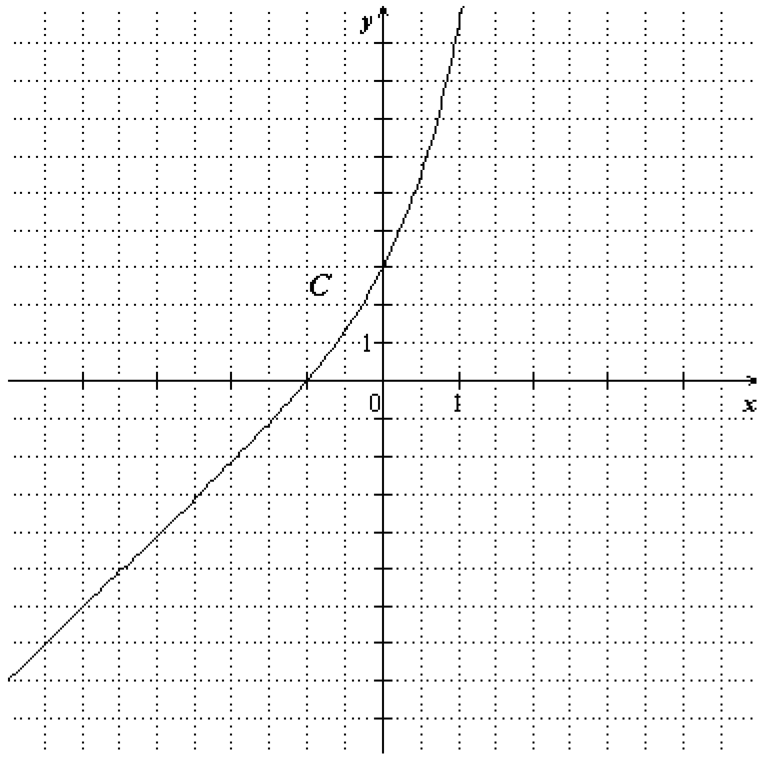
**a)** Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $K$.

**b)** Donner la valeur de $K$, arrondie à $10^{-2}$ près.

**c)** On admet que pour tout $x$ de l'intervalle $[ -1 ; 1 ]$, $f(x) \geqslant 0$.
Donner une interprétation graphique de $K$.

*<u>Aide(s):</u> Délimiter et hachurer le domaine associé à K. Estimer son aire. Écrire l'intégrale associée avant de faire le calcul. Pensez au facteur de conversion u.a. ↔ cm$^2$.*

*<u>Aide(s):</u> Repère pour la représentation graphique de* ***C***.

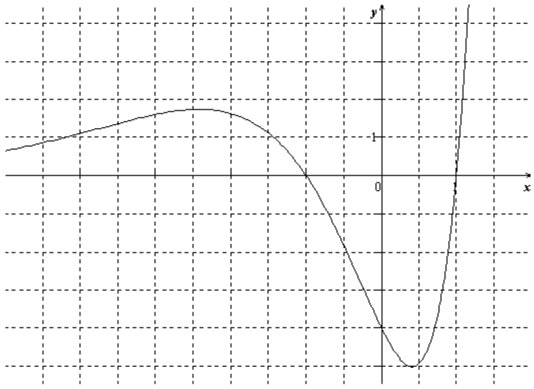


**EXERCICE 2009_Gr_B:** *(Extrait du sujet groupement B – Session 2009)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude locale d'une fonction*

Soit $f$ la fonction définie sur ℝ par $f(x) = (4x^2 - 4) \times e^x$. Sa courbe représentative ***C*** dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.




**1.** Fonction dérivée

**a)** Démontrer que pour tout réel $x$, $f'(x) = 4(x^2 + 2x - 1) \times e^x$.

**b)** Donner sans justification la valeur exacte et la valeur approchée arrondie à $10^{-2}$ près de l'abscisse de chacun des points de la courbe ***C*** où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

**2.** Développement limité

**a)** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

$$f(x) = -4 - 4x + 2x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

**b)** Déduire du **a)** une équation de la tangente $T$ à la courbe ***C*** au point d'abscisse 0.

**c)** Étudier la position relative de ***C*** et $T$ au voisinage du point d'abscisse 0.

*Partie C. Calcul intégral*

**Dans cette partie, les questions 1. et 2. peuvent être traitées de façon indépendante.**

**1.** La fonction $f$ définie au début de la partie $B$ est une solution de l'équation différentielle ($E$) de la partie $A$.
Donc, pour tout $x$ de ℝ, on a $f(x) = -f''(x) + 2f'(x) + 8e^x$.
En déduire une primitive $F$ de la fonction $f$ sur ℝ.

<u>*Rappel(s):*</u>

$(E) : y'' - 2y' + y = 8e^x$
$f(x) = (4x^2 - 4) \times e^x$
$f'(x) = 4(x^2 + 2x - 1) \times e^x$.

**2.** Calcul intégral

**a)** Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [ 0 ; 1 ].

**b)** Dans cette question, on admet que la fonction $F$ définie sur ℝ par :
$F(x) = (4x^2 - 8x + 4) \times e^x$ est une primitive de la fonction $f$.
Déduire de ce qui précède l'aire $A$, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe ***C*** et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

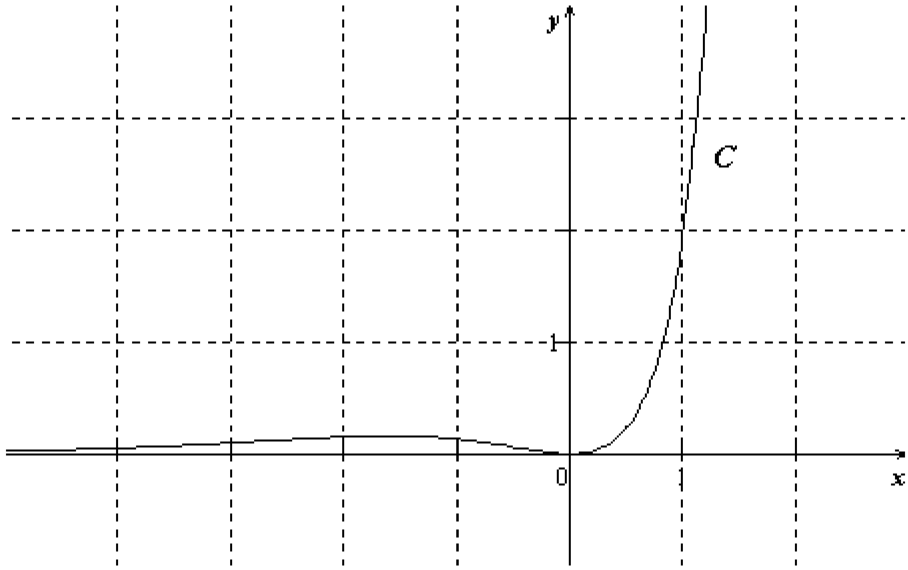
<u>*Aide(s):*</u> *Délimiter et hachurer le domaine associé. Estimer son aire. Écrire l'intégrale associée avant de faire le calcul. Pensez au facteur de conversion u.a. ↔ cm².*

**EXERCICE 2008_Gr_B:** *(Extrait du sujet groupement B – Session 2008)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude locale d'une fonction*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1) \times e^{x}$. Sa courbe représentative $\boldsymbol{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.




**1.** Fonction dérivée

**a)** Démontrer que pour tout réel $x$, $f'(x) = e^{x} (2 e^{x} - 2 - x)$.

**b)** En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente $T$ à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

**2.** Développement limité

**a)** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \to e^{2x}$

**b)** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

$$f(x) = \tfrac{1}{2} x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

*Partie C. Calcul intégral*

**1.** On note $I = \int_{-0,3}^{0,3} \tfrac{1}{2} x^2 \, dx$. Démontrer que $I = 0,009$.

**2.** On note $J = \int_{-0,3}^{0,3} e^{2x} \, dx$. Démontrer que $J = 0,5 ( e^{0,6} + e^{-0,6} )$.

**3.** On note $K = \int_{-0,3}^{0,3} (x + 1) \times e^{x} \, dx$.
Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que $K = 0,3 ( e^{0,3} + e^{-0,3} )$.

**4.** On note $L = \int_{-0,3}^{0,3} f(x) \, dx$.

**a)** Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $L$.

**b)** Donner la valeur approchée de $L$ arrondie à $10^{-5}$.

**c)** Vérifier que la valeur exacte de $I$ et la valeur approchée de $L$ obtenue à la question précédente différent de $4,5 \times 10^{-4}$.

**EXERCICE 2007_Gr_B:** *(Extrait du sujet groupement B – Session 2007)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude locale d'une fonction*

Soit $\varphi$ la fonction définie sur [ 0 ; + ∞ [ par $\varphi(t) = 1 - e^{-710t}$.

On désigne par ***C*** la courbe représentative de $\varphi$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où on prend comme unités : 10 cm pour 0,01 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

**1.** Montrer que la fonction $\varphi$ est croissante sur [ 0 ; + ∞ [.

**2.** Développement limité

**a)** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $\varphi$ est :

$$\varphi(t) = 710\, t - ½\, (710\, t)^2 + t^2\, \varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(t) = 0 \text{ pour } t \to 0.$$

**b)** En déduire une équation de la tangente $T$ à la courbe ***C*** au point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de ***C*** et $T$ au voisinage de ce point.

**3.** Tracer sur la copie la tangente $T$ et la courbe ***C*** dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ définie au début de la partie *B*. On pourra se limiter à la partie de ***C*** correspondant à l'intervalle [ 0 ; 0,01 ].

**4.** Résolution d'équation

**a)** Déterminer par le calcul le nombre réel α positif tel que $\varphi(\alpha) = 0{,}5$.
Donner la valeur exacte de α, puis sa valeur approchée arrondie à $10^{-5}$.

**b)** Retrouver sur la figure le résultat obtenu au **a)** : faire apparaître les constructions utiles.

*Partie C. Calcul intégral*

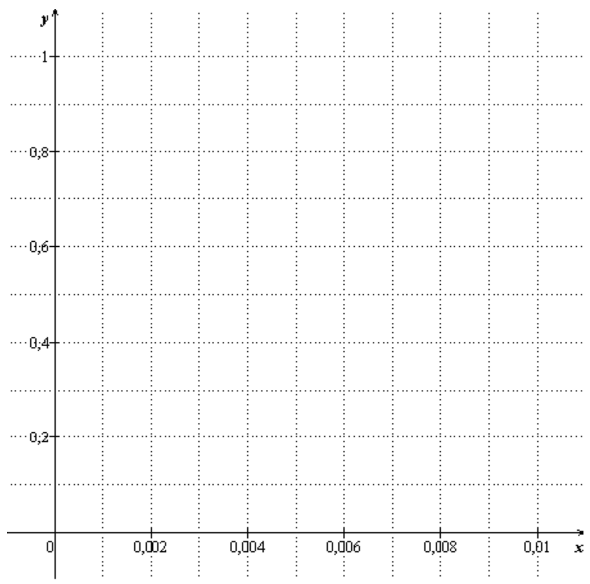
**1.** Pour tout réel positif $t$, on note $I(t) = 710 \times \int_0^t x \times e^{-710x}\, dx$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$I(t) = -\,t\, e^{-710t} - (\,1 / 710\,)\, e^{-710t} + (\,1 / 710\,)$$

**2.** Calculer la limite de $I$ lorsque $t$ tend vers plus l'infini.
Donner la valeur exacte de cette limite, puis sa valeur approchée arrondie à $10^{-5}$.

*<u>Aide(s):</u> Repère pour la représentation graphique de T et de **C** (l'échelle n'est pas respectée).*

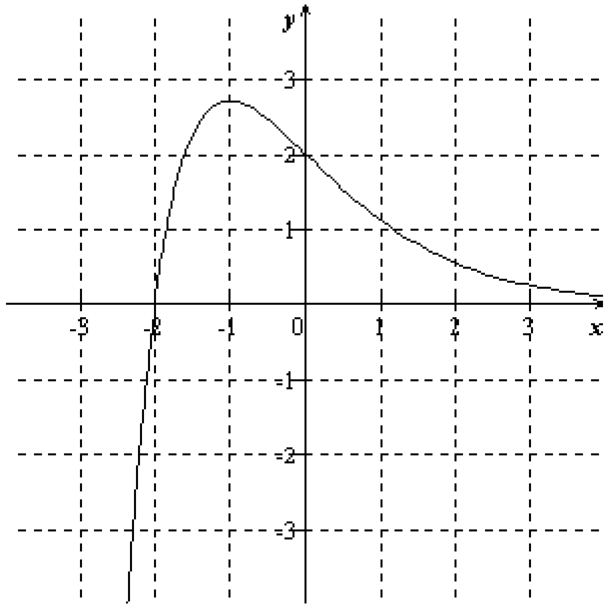


**EXERCICE 2006_Gr_B:** *(Extrait du sujet groupement B – Session 2006)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude locale d'une fonction*

La courbe ***C*** ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)\,e^{-x}$.




**1.** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

$$f(x) = 2 - x + (1/6)\,x^3 + x^3\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

**2.** Déduire du **1.** une équation de la tangente $T$ à la courbe ***C*** au point d'abscisse 0.

**3.** Étudier la position relative de ***C*** et $T$ au voisinage du point d'abscisse 0.

*Aide(s): Tracer la tangente T dans le même repère que la courbe **C**.*

*Partie C. Calcul intégral*

On note $I = \int_0^{0,6} f(x)\,dx$.

**1.** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = 3 - 3,6\,e^{-0,6}$.

**2.** Donner la valeur approchée arrondie à $10^{-3}$ de $I$.

**3.** Donner une interprétation graphique de $I$.

*Aide(s): Délimiter et hachurer le domaine associé. Estimer son aire. Écrire l'intégrale associée avant de faire le calcul. Pensez au facteur de conversion u.a. ↔ cm².*

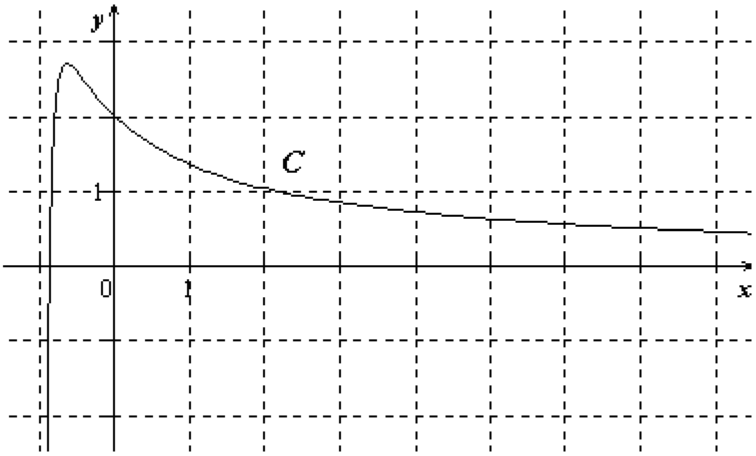
**EXERCICE 2005_Gr_B:** *(Extrait du sujet groupement B – Session 2005)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude locale d'une fonction*

Soit $f$ la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2+\ln(1+x)}{1+x}$.

Sa courbe représentative $\boldsymbol{C}$, dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 1 cm, est donnée ci-dessous.




**1.** On admet les deux limites suivantes:
La limite de la fonction $f$ est égale à moins l'infini lorsque $x$ tend vers $-1$.
La limite de la fonction $f$ est égale à 0 lorsque $x$ tend vers plus l'infini.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\boldsymbol{C}$ ?

**2.** Étude de la fonction.

**a)** Démontrer que, pour tout $x$ de $]-1\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$.

**b)** Résoudre dans $]-1\,;+\infty[$ l'inéquation $-1-\ln(1+x)\geqslant 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque $x$ varie dans $]-1\,;+\infty[$.

**c)** Établir le tableau de variation de $f$.

**3.** Un logiciel de calcul formel donne le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ :

$$f(x)=2-x+\tfrac{1}{2}x^2+x^2\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x)=0 \text{ pour } x\to 0.$$

*Ce résultat, admis, n'a pas a être démontré.*

**a)** En déduire une équation de la tangente $T$ à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0.

**b)** Étudier la position relative de $\boldsymbol{C}$ et $T$ au voisinage du point d'abscisse 0.

*<u>Aide(s):</u> Tracer la tangente T dans le même repère que la courbe **C**.*

*Partie C. Calcul intégral*

On note $I = \int_0^{0,6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**1.** Déterminer la dérivée de la fonction $G$ définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$G(x) = \tfrac{1}{2}\,[\,\ln(1+x)\,]^2\,.$$

**2.** En déduire qu'une primitive de $f$ sur $]-1\,;+\infty[$ est définie par :

$$F(x) = 2\ln(1+x) + \tfrac{1}{2}\,[\,\ln(1+x)\,]^2\,.$$

**3.** On note $I = \int_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

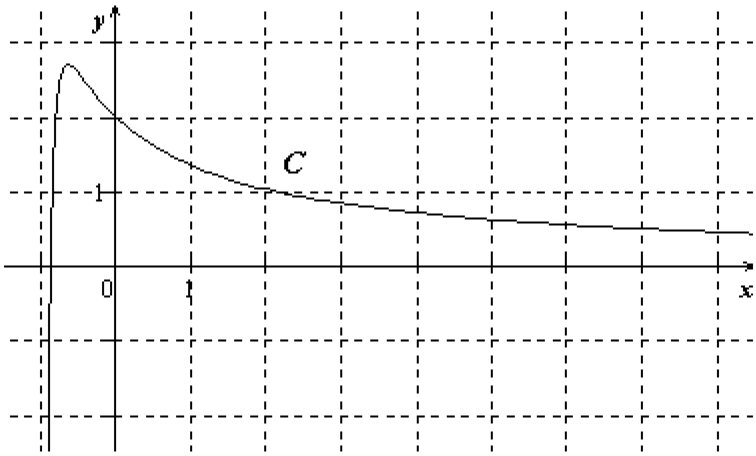
**a)** Démontrer que $I = \tfrac{1}{2}(\ln 3)^2 + 2\ln 3$.

**b)** Donner la valeur approchée à $10^{-2}$ de $I$.

**c)** Donner une interprétation graphique du résultat obtenu au **b)**.

*Aide(s): Délimiter et hachurer le domaine associé. Estimer son aire. Écrire l'intégrale associée avant de faire le calcul. Pensez au facteur de conversion u.a. ↔ cm².*

*Aide(s): Repère pour la représentation graphique de **C**.*



**EXERCICE 2013_CPI:** *(Extrait du sujet CPI – Session 2013)*

***Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.***

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle (...)*

*Partie B. Étude locale d'une fonction*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-2x}\sin(x) + 2\,x - 1$ .

On désigne par $\boldsymbol{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

**1.** Développement(s) limité(s)

**a)** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \to \mathrm{e}^{-2x}$ .

**b)** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \to \sin(x)$ .

**c)** En déduire le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \to \mathrm{e}^{-2x}\sin(x)$ .

**d)** Finalement, montrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

$$f(x) = -1 + 4\,x - 4\,x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

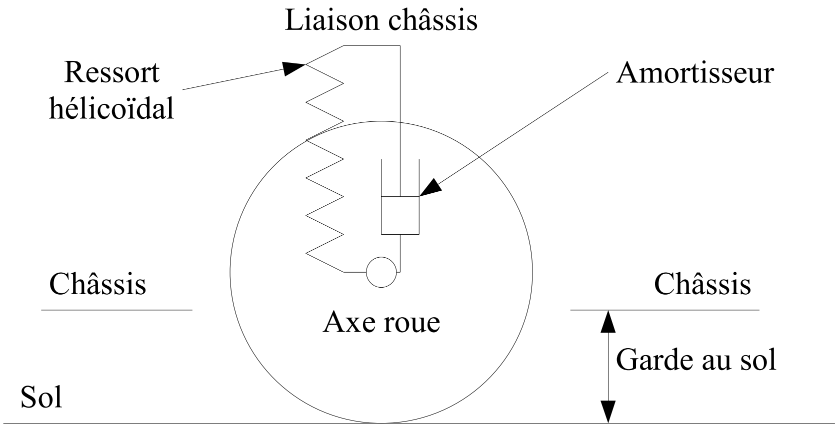
**2.** Déduction(s)

**a)** Déduire de la question précédente une équation de la tangente $T$ à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0.

**b)** Étudier les positions relatives de $\boldsymbol{C}$ et $T$ au voisinage du point d'abscisse 0 et illustrer cette situation par un schéma.

**EXERCICE 2012_CPI:** *(Extrait du sujet CPI – Session 2012)*

La suspension d'une automobile est assurée par des systèmes indépendants formés chacun d'un ressort hélicoïdal et d'un amortisseur à piston à huile montés entre l'arbre de roue et le châssis.




Lors d'un essai dynamique à vide, le châssis est abaissé puis libéré sans vitesse initiale.

*Partie A. Étude locale d'une fonction*

Sous les conditions initiales de l'essai, la hauteur du châssis par rapport au sol, appelée garde au sol, est modélisée par la fonction $f$ de la variable $t$, définie sur $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$ dont la courbe représentative $\boldsymbol{C_f}$ est donnée en **Annexe 2**. La distance du châssis au sol est donnée en millimètres, le temps en secondes.

**1.** À l'aide du graphique, déterminer les conditions initiales $f(0)$ et $f'(0)$.

**2.** On admet que la fonction $f$, définie sur $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$ s'exprime par :

$$f(t) = (-150\cos(16t) - 112{,}5\sin(16t))\,\mathrm{e}^{-12t} + 150$$

**a)** Montrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \to \mathrm{e}^{-12t}$ est :

$$\mathrm{e}^{-12t} = 1 - 12t + 72t^2 + t^2\varepsilon(t) \text{ avec } \lim \varepsilon(t) = 0 \text{ pour } t \to 0.$$

**b)** On admet les développement limité d'ordre 2, au voisinage de 0, suivants :

$\sin(16t) = 16t + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim \varepsilon(t) = 0$ pour $t \to 0$.

$\cos(16t) = 1 - 128t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim \varepsilon(t) = 0$ pour $t \to 0$.

Montrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

$$f(t) = 100 + 30000t^2 + t^2\varepsilon(t) \text{ avec } \lim \varepsilon(t) = 0 \text{ pour } t \to 0.$$

**c)** En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative $\boldsymbol{C_f}$ au point d'abscisse 0.

**d)** Retrouver les conditions initiales de la question **1.**.

*Partie B. Résolution d'une équation différentielle et étude de fonction*

(...)

**1.** On considère la fonction $h$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $h(t) = (-3000\,t - 150)\,e^{-20t} + 250$.

**a)** Démontrer que pour tout réel de $[\,0\,;+\infty\,[$, $h'(t) = 60000\,t\,e^{-20t}$.

**b)** Étudier les variations de $h$.

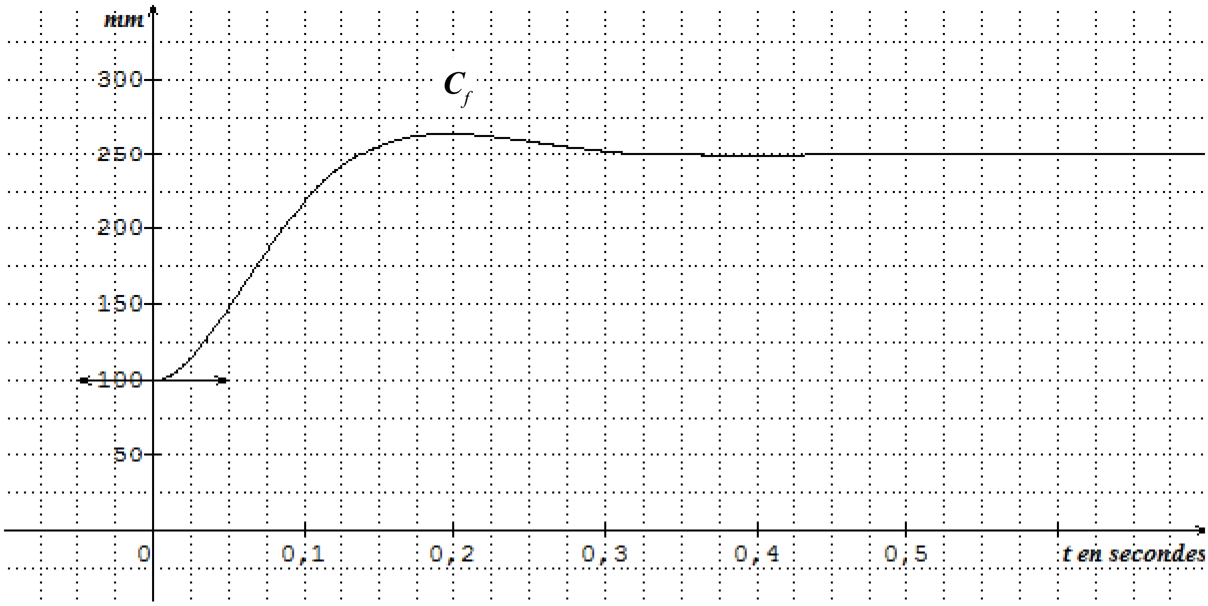
**2.**

**a)** Compléter le tableau de valeurs de l'**Annexe 2** (Les valeurs seront arrondies au dixième).

**b)** Construire la courbe représentative $\Gamma$ de $h$ sur le même graphique que $C_f$ sur l'Annexe 2. L'objectif est-il atteint ?

**Annexe 2**

*Partie A* : Représentation graphique de la fonction $f$




*Partie B.* Question **2.a)**

| $t$ | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(t)$ | | | | | | | | |

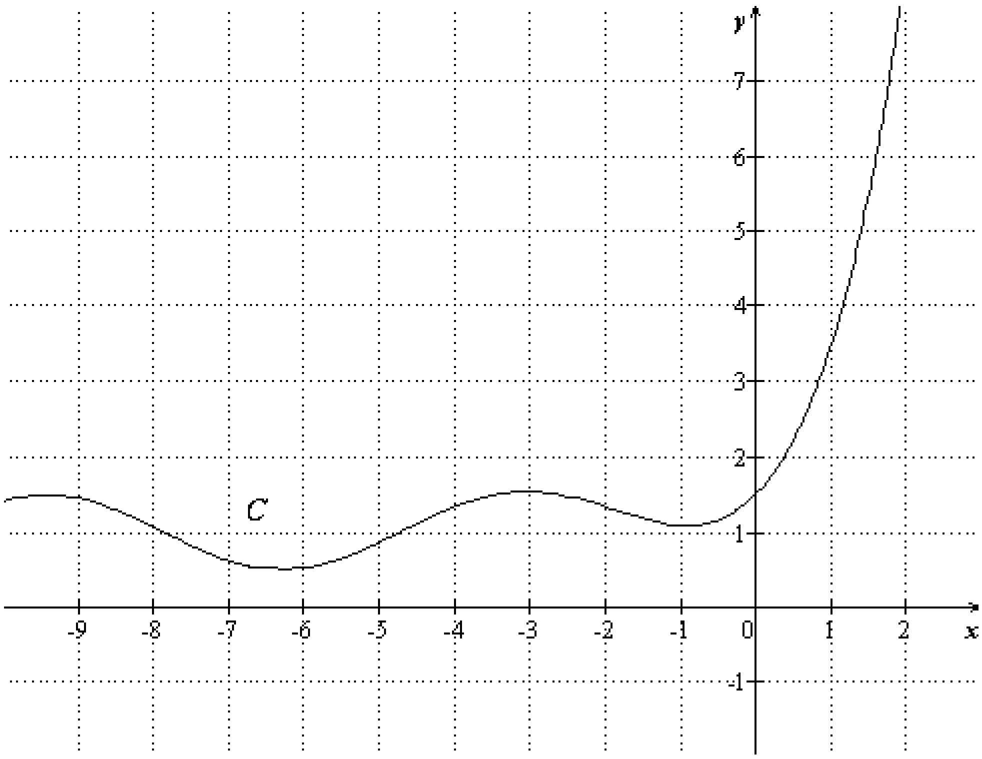
**EXERCICE 2011_CPI:** *(Extrait du sujet CPI – Session 2011)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle. (...)*

*Partie B. Étude locale d'une fonction.*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + e^{x} - ½ \cos x$.

On a tracé ci-dessous sa courbe représentative $\boldsymbol{C}$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .




**1.** Développement limité

**a)** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \to -½ \cos x$.

**b)** En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

$$f(x) = 3/2 + x + ¾\, x^2 + x^2\, \varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

**2.** Déduction

**a)** Déduire de la question précédente une équation de la tangente $T$ à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0.

**b)** Étudier les positions relatives de $\boldsymbol{C}$ et $T$ au voisinage du point d'abscisse 0.

*<u>Aide(s):</u> Tracer la tangente T dans le même repère que la courbe* ***C****.*

**EXERCICE 2010_CPI_1:** *(Extrait du sujet CPI – Session 2010)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle. (...)*

*Partie B. Étude d'une fonction.*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2x + 3)\,e^x$.

On désigne par $\boldsymbol{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**1.** Démontrer que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = (x^2 + 4x + 5)\,e^x.$$

**2.** Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque $x$ varie dans $\mathbb{R}$.

**3.** Limites

**a)** Déterminer la limite de $f(x)$ de lorsque $x$ tend vers plus l'infini.

**b)** Déterminer la limite de $f(x)$ de lorsque $x$ tend vers moins l'infini.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\boldsymbol{C}$ ?

**4.** Établir le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**5.** Développement limité

**a)** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

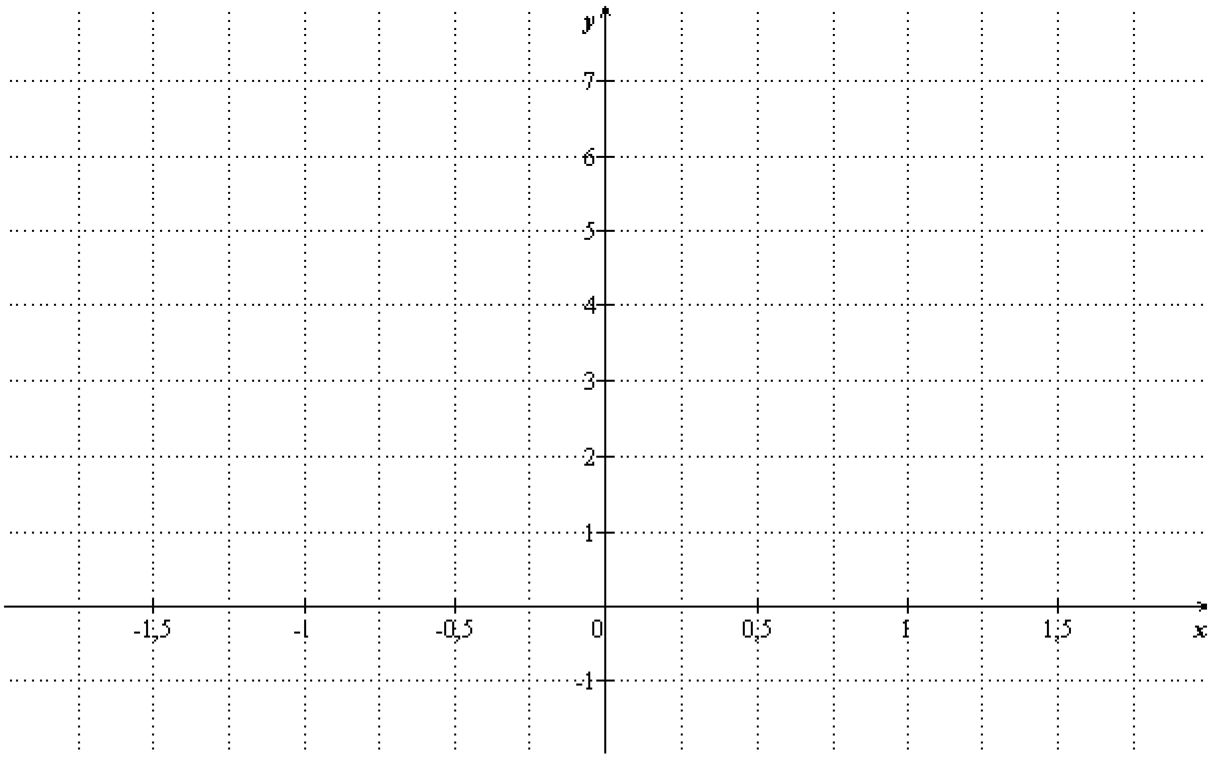
$$f(x) = 3 + 5x + 9/2\,x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

**b)** En déduire une équation de la tangente $T$ à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0.

**c)** Étudier la position relative de $\boldsymbol{C}$ et $T$ au voisinage du point d'abscisse 0.

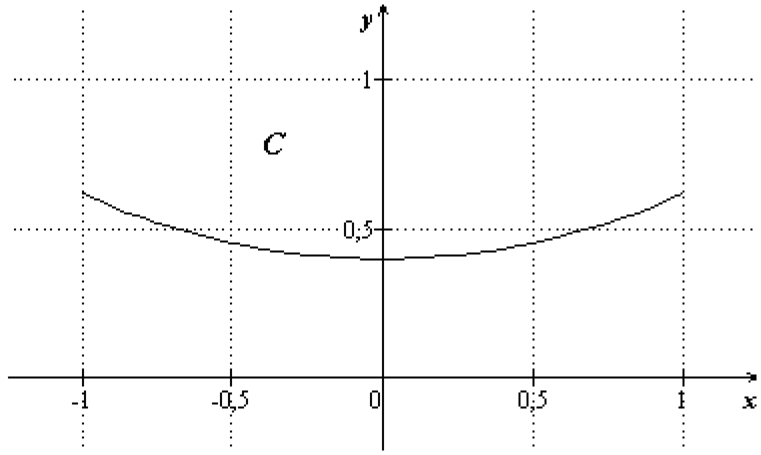
<u>*Aide(s):*</u> *Tracer la tangente T dans le même repère que la courbe* ***C****.*

<u>*Aide(s):*</u> *Repère pour la représentation graphique de* ***C*** *et de T.*



**EXERCICE 2010_CPI_2:** *(Extrait du sujet CPI – Session 2010)*

La courbe ***C*** ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthogonal, de la fonction $f$ définie sur $[-1\,;\,1]$ par $f(x) = 1/5 \times (\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})$.




On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe ***C*** autour de l'axe des abscisses.

On désigne par $V$ le volume, en unités de volume, de ce solide.

On admet que $V = \int_{-1}^{1} \pi \times [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

**1.** Vérifier que : $V = \int_{-1}^{1} \pi/25 \times (2 + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x})\,\mathrm{d}x$.

**2.** Démontrer que : $V = \pi/25 \times (4 + \mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-2})$.

**3.** Donner la valeur approchée arrondie à $10^{-2}$ de $V$.

*Le solide obtenu ci-dessus est le modèle d'un élément de mobilier urbain.*

**EXERCICE 2009_CPI:** *(Extrait du sujet CPI – Session 2009)*

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle. (...)*

*Partie B. Étude d'une fonction et réalisation d'une figure*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. On désigne par ***C*** la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 centimètres.

**1.** Limites

**a)** Déterminer la limite de $f(x)$ de lorsque $x$ tend vers plus l'infini et $x$ tend vers moins l'infini.

**b)** Que peut-on en déduire pour la courbe ***C*** ?

**2.** Variation

**a)** Démontrer que pour tout réel $x$, $f'(x) = -x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

**b)** Donner le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**3.** Tracés

**a)** Tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe ***C*** dans le repère **défini au début de la partie *B.***

**b)** Tracer dans le même repère que la courbe ***C*** la courbe ***P*** d'équation $y = 2 - \frac{1}{2} x^2$.

**On ne demande pas d'étudier les variations de la fonction définie par** $x \to 2 - \frac{1}{2} x^2$.

*On constate que les courbes* ***C*** *et* ***P*** *sont proches l'une de l'autre sur l'intervalle* $[-0{,}5\ ;\ 0{,}5]$.

*Partie C. Détermination d'une valeur approchée d'une intégrale.*

Dans cette partie, on se propose de déterminer une valeur approchée de : $I = \int_{-0,5}^{0,5} f(x)\,dx$.

**1.** Développement limité

**a)** En utilisant le développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par : $x \to e^{-\frac{x^2}{2}}$.

**b)** En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

$$f(x) = 2 - \tfrac{1}{2} x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

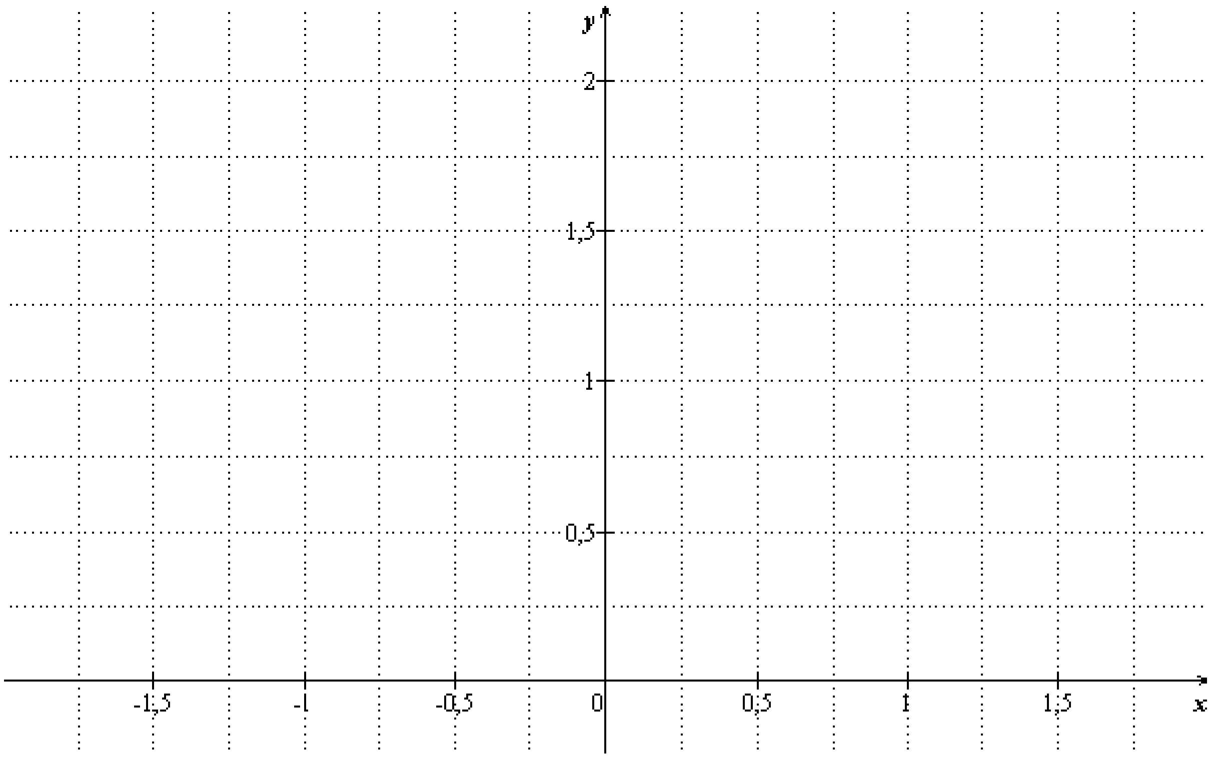
**2.** On note $J = \int_{-0,5}^{0,5} \left( 2 - \tfrac{1}{2} x^2 \right) dx$.

**a)** Démontrer que $J = 47/24$. Donner la valeur approchée de $J$ arrondie à $10^{-3}$.

**b)** Un logiciel donne $I \approx 1,960$. Vérifier que cette valeur approchée de $I$ et la valeur approchée de $J$ obtenue à la question **a)** diffèrent de $2 \times 10^{-3}$.

*<u>Aide(s):</u> Délimiter et hachurer le domaine associé à J. Estimer son aire. Écrire l'intégrale associée avant de faire le calcul. Pensez au facteur de conversion u.a. ↔ cm $^2$.*

*<u>Aide(s):</u> Repère pour la représentation graphique de **C** et de **P**.*



**EXERCICE 2008_CPI_1:** *(Extrait du sujet CPI – Session 2008)*

***Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.***

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle. (...)*

*Partie B. Étude d'une fonction.*

Soit $f$ la fonction définie sur ℝ par $f(x) = (x^2 + 4x + 3)\,e^{-x}$.

**1.** Développement limité

**a)** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par : $x \to e^{-x}$.

**b)** En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

$$f(x) = 3 + x - 3/2\,x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

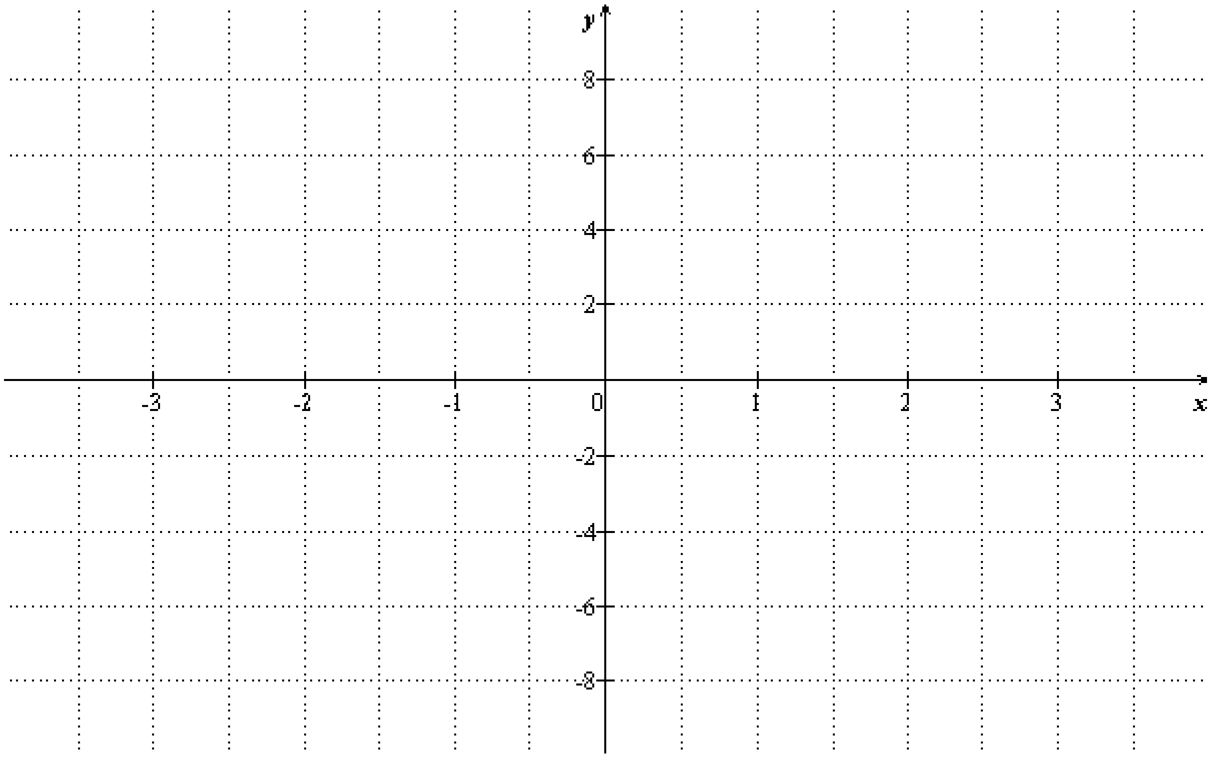
**2.** On désigne par ***C*** la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal du plan.

**a)** Déduire de la question précédente une équation de la tangente $T$ à la courbe ***C*** au point d'abscisse 0.

**b)** Étudier les positions relatives de ***C*** et $T$ au voisinage du point d'abscisse 0.

*Aide(s): Tracer la tangente T dans le même repère que la courbe **C**.*

*Aide(s): Repère pour la représentation graphique de **C** et de T.*



**EXERCICE 2008_CPI_2:** *(Extrait du sujet CPI – Session 2008)*

*Partie A. Étude des variations d'une fonction*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\ a\,x + b\ )\ e^{-x}$, où $a$ et $b$ sont deux nombres réels. La courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal où **l'unité graphique est 2 cm** est donnée ci-dessous.

**1.** La courbe $\boldsymbol{C}$ passe par les points $A$ et $B$ de coordonnées respectives ( 0 ; – 2 ) et ( 2 ; 0 ).
Déterminer les nombres réels $a$ et $b$.

**Dans la suite de cet exercice, on admet que la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par**
**$f(x) = (\ x - 2\ )\ e^{-x}$.**

**2.** Étude

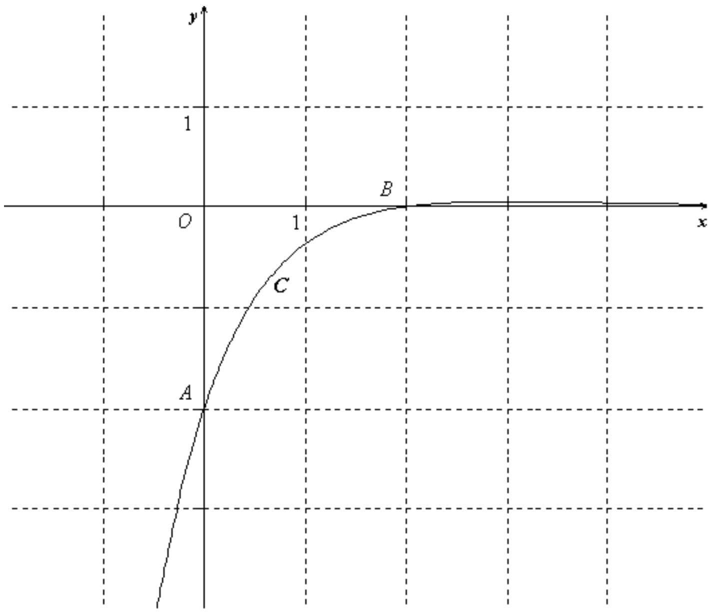
**a)** Démontrer que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (\ 3 - x\ )\ e^{-x}$.

**b)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

**c)** Établir le tableau de variation de $f$.

Dans ce tableau, on ne demande pas de faire figurer les limites

*Aide(s): Repère pour la représentation graphique de* ***C*** *(l'échelle n'est pas respectée)..*




*Partie B. Calcul intégral*

On note $I = \int_0^2 f(x)\,dx$.

**1.** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = -1 - e^{-2}$.

**2.** Déduction

**a)** En déduire la valeur exacte de l'aire $S$ en $cm^2$ de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées et la courbe $\boldsymbol{C}$ entre les points $A$ et $B$ d'abscisses respectives 0 et 2.

**b)** Donner la valeur approchée de $S$ arrondie à $10^{-2}$.

*Aide(s): Délimiter et hachurer le domaine associé à I. Estimer son aire. Écrire l'intégrale associée avant de faire le calcul. Pensez au facteur de conversion u.a. ↔ $cm^2$.*

**EXERCICE 2007_CPI_1:** *(Extrait du sujet CPI – Session 2007)*

***Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.***

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle. (...)*

*Partie B. Étude d'une fonction.*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,e^{-x} \times \sin \frac{1}{2} x$.

**1.** Développement limité

**a)** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par : $x \to e^{-x}$.

**b)** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par : $x \to \sin \frac{1}{2} x$.

**c)** Déduire du **a)** et du **b)** que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

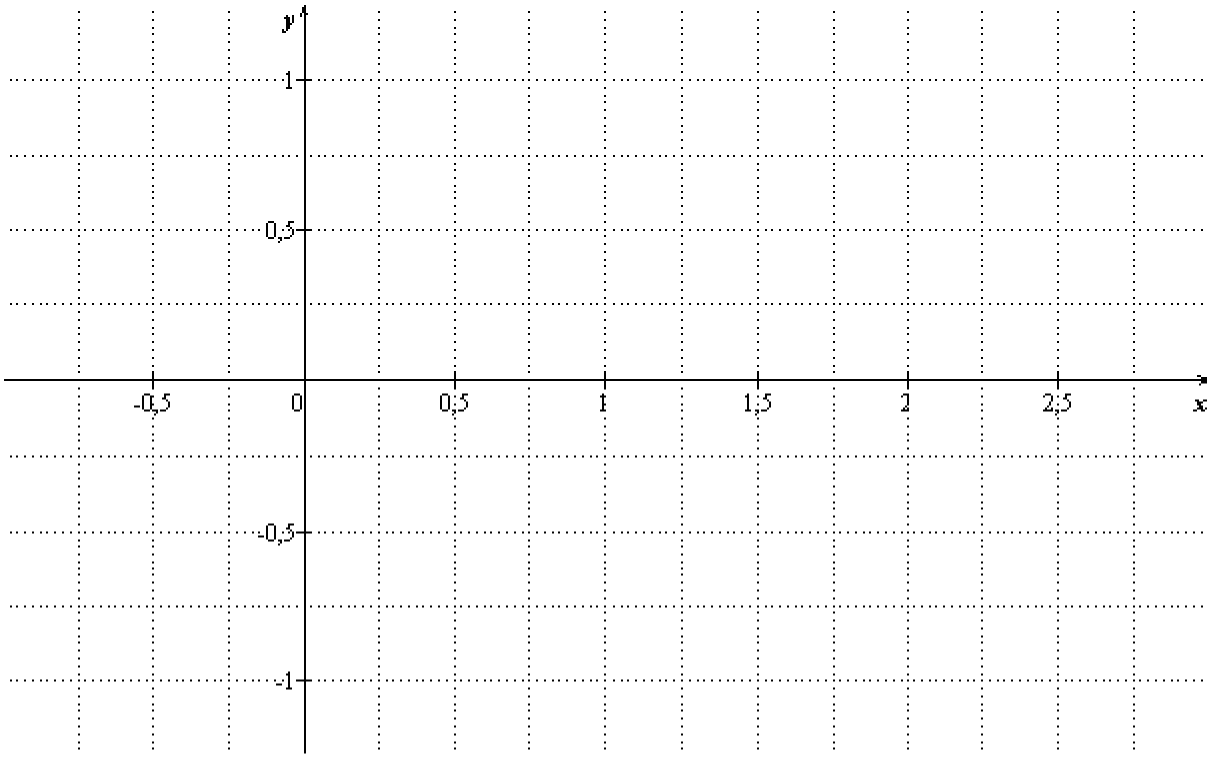
$$f(x) = x - x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

**2.** Déduire de la question précédente une équation de la tangente $T$ à la courbe représentative $\boldsymbol{C}$ de $f$ au point d'abscisse zéro.

**3.** Étudier les positions relatives de $\boldsymbol{C}$ et $T$ au voisinage du point d'abscisse zéro.

<u>Aide(s):</u> *Tracer la tangente T dans le même repère que la courbe **C**.*

<u>Aide(s):</u> *Repère pour la représentation graphique de **C** et de T.*



**EXERCICE 2007_CPI_2:** *(Extrait du sujet CPI – Session 2007)*

Soit $f$ la fonction définie sur [ 0 ; 3 ] par $f(x) = 2\,e^{-\frac{1}{2}x}\sqrt{x}$.

On note $\boldsymbol{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 4 cm.

*Partie A. Étude des variations et courbe représentative*

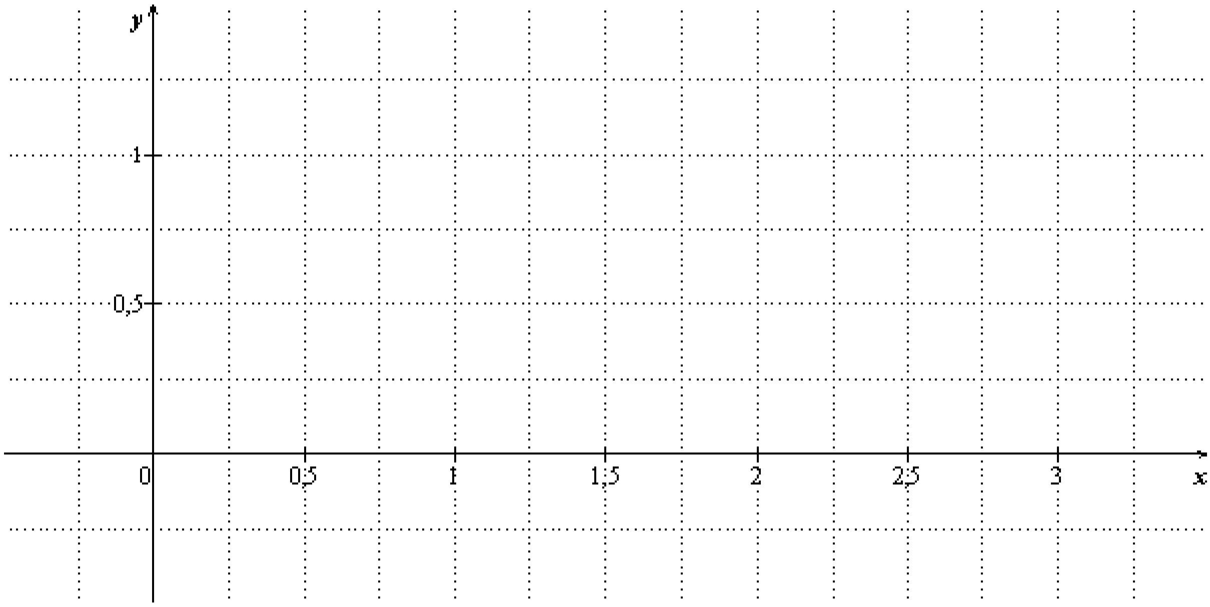
**1.** Calculer $f(0)$ et $f(3)$. Donner la valeur approchée arrondie à $10^{-2}$ de $f(3)$.

**2.** Fonction dérivée

**a)** Démontrer que, pour tout $x$ de ] 0 ; 3 ], $f'(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}x}(1-x)}{\sqrt{x}}$.

**b)** En déduire les variations de $f$ sur ] 0 ; 3 ].

**c)** On admet qu'à l'origine du repère la tangente à la courbe $\boldsymbol{C}$ est l'axe des ordonnées.
Construire la courbe $\boldsymbol{C}$ sur une feuille de papier millimétré.




*Partie B. Calcul intégral*

On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $\boldsymbol{C}$ autour de l'axe des abscisses. On désigne par $V$ le volume en unités de volume de ce solide.

On admet que $V = \int_0^3 \pi\,[\,f(x)\,]^2\,dx$.

**1.** Vérifier que $V = \int_0^3 4\,\pi\,x \times e^{-x}\,dx$.

**2.** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $V = 4\,\pi\,(\,1 - 4\,e^{-3}\,)$.

**3.** Donner une valeur approchée arrondie à $10^{-2}$ de $V$.

**EXERCICE 2006_CPI:** *(Extrait du sujet CPI – Session 2006)*

***Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.***

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle. (...)*

*Partie B. Étude d'une fonction.*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} \times \sin 2x - x^3 + 2x^2 - x$.

**1.** À l'aide du développement limité de la fonction $t \to e^t$, à l'ordre 3 au voisinage de 0, écrire le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction $x \to e^{-x}$.

**2.** Écrire le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction $x \to \sin 2x$.

**3.** En déduire le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction: $x \to e^{-x} \times \sin 2x$.

**4.** En déduire que le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction $f$ est :

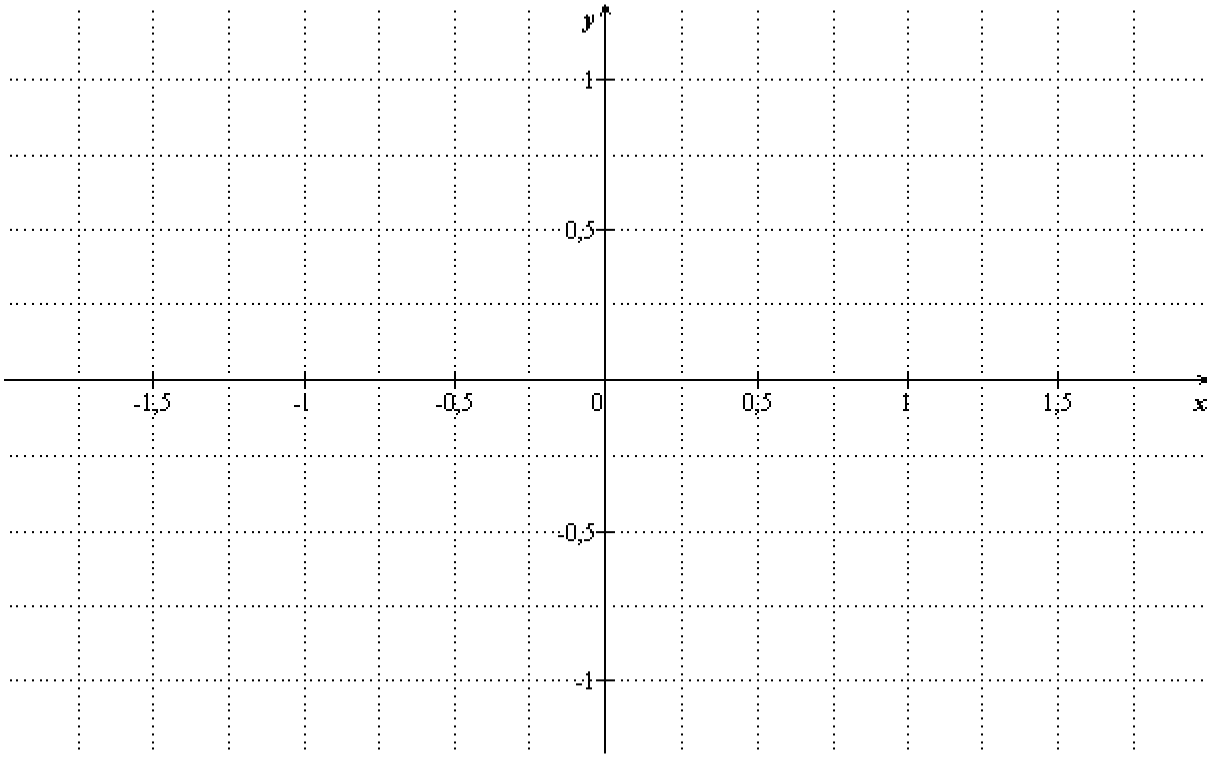
$$f(x) = x - 4/3\, x^3 + x^3\, \varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

**5.** Déduire de la question précédente une équation de la tangente $T$ à la courbe représentative $\boldsymbol{C}$ de $f$ au point d'abscisse zéro.

**6.** Étudier les positions relatives de $\boldsymbol{C}$ et $T$ au voisinage du point d'abscisse zéro.

*<u>Aide(s):</u> Tracer la tangente T dans le même repère que la courbe* ***C****.*

*<u>Aide(s):</u> Repère pour la représentation graphique de* ***C*** *et de T.*



**EXERCICE 2005_CPI:** *(Extrait du sujet CPI – Session 2005)*

***Les trois parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.***

*Partie A. Résolution d'une équation différentielle. (...)*

*Partie B. Étude d'une fonction et calcul intégral.*

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x\,e^{-x}$.

**1.** On note $I = \int_0^{0,1} g(x)\,dx$.
Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = 1{,}1\,e^{-0{,}1} - 1$.

**2.** Développement limité.

**a)** À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \to e^{t}$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x \to e^{-x}$.

**b)** En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $g$ est :

$$g(x) = -x + x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 + x^3\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

**c)** *En déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe représentative **C** de f au point d'abscisse zéro.*

**d)** *Étudier les positions relatives de **C** et T au voisinage du point d'abscisse zéro.*

*<u>Aide(s):</u> Tracer la tangente T dans le même repère que la courbe **C**.*

**3.** On note $J = \int_0^{0,1} \left(-x + x^2 - \tfrac{1}{2}x^3\right) dx$.
Démontrer que $J = -0{,}1123 / 24$.

**4.** On considère l'affirmation suivante: le nombre $I - J$ est inférieur à $10^{-6}$.
Cette affirmation est-elle vraie ?

*<u>Aide(s):</u> Délimiter et hachurer le domaine associé à I. Estimer son aire. Écrire l'intégrale associée avant de faire le calcul. Pensez au facteur de conversion u.a. ↔ cm².*

*<u>Aide(s):</u> Repère pour la représentation graphique de **C** et de T.*