Liens transversaux:

- Maths – Chapitre Équations différentielles (pour la fonction exponentielle).
- Maths – Chapitre Nombre complexe (Niveau BTS)
- Électricité – Chapitre Étude des circuit RC ou RL Gain et régime transitoire
- Physique – Chapitre Acoustique (pour la fonction ln(x) et Log(x))

Domaines d'utilité:

- Étude de fonctions contenant la fonction exponentielle ou logarithme.
- Vers la croissance comparée des fonctions logarithme, puissance, et exponentielle
- Vers les fonctions logarithme décimal, exponentielle de base a, puissance de base α
- Vers les fonctions réciproques.
- Résolution d'équations faisant intervenir des termes exponentielles ou logarithme.

Objectifs:

- Connaître l'allure des courbes déduites de la fonction exponentielle.
- Connaître l'allure de la courbe logarithme
- Connaître et savoir appliquer les propriétés des opérations des deux fonctions.
- Connaître les relations de passages et d'équivalences liant ces deux fonctions.

Fonction exponentielle et logarithme

Table des matières

Pré-requis

- Étude d'une fonction (tableau de valeurs, construction d'une courbe)
- Dérivée et tangente à une courbe en un point donné.
- Utilisation ponctuelle calculatrice.

Fonction(s) exponentielle(s)

I - Expression mathématique, notation, touche(s) calculatrice et tableau de valeurs

1. Noms et notations

Consigne(s): Compléter le tableau ci-dessous en indiquant le nom de la fonction $f(x) = 10^x$ et les combinaisons des touches de votre calculatrice pour accéder rapidement aux fonctions.

Fonctions	***Noms***	***Autre notation***	***Touche(s) calculatrice***
$f(x) = e^x$	Fonction exponentielle ou exponentielle de base e.	$f(x) = \exp(x)$	
$f(x) = 10^x$		$f(x) = e^{(x \times \ln 10)}$	
$f(x) = a^x$	Fonction exponentielle de base a (a > 0).	$f(x) = e^{(x \times \ln \mathbf{a})}$	

2. Tableau de valeurs

Consigne(s): Sur la page n°7 du document, compléter le tableau de valeurs et tracer la représentation graphique de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$. Placer également sur la courbe les points Y et A indiqués dans le tableau de valeurs.

3. Tableau de variation

Consigne(s): Sur la page n°7 du document, pré-remplir le tableau de variation de la fonction exponentielle. On indiquera les coordonnées des points Y et A et les informations des colonnes extrêmes du tableau de valeurs (limites en moins et en plus l'infini).

4. Limites des capacités de calcul de la calculatrice:

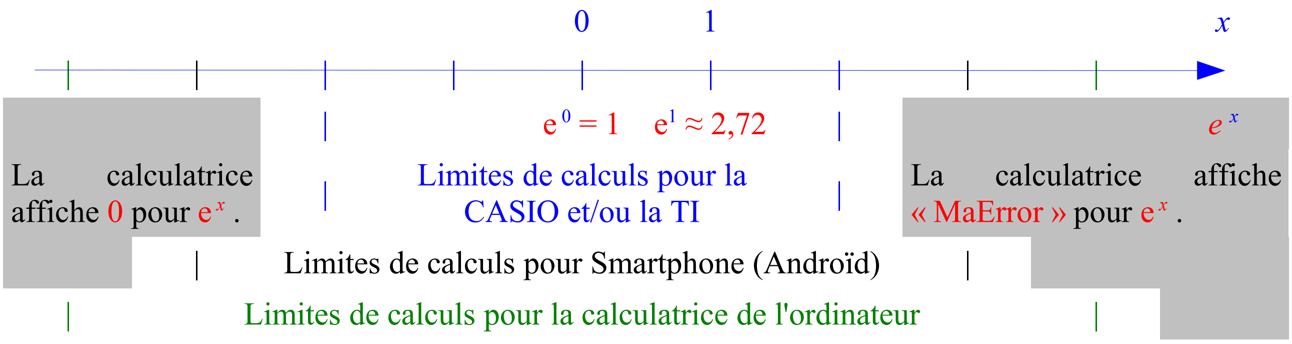
Consigne(s): Compléter le tableau suivant puis répondre aux questions ci-dessous.

Valeur de x_1, **entier négatif** à **partir** de laquelle la calculatrice affiche 0 pour e^x.	$x_1 =$
Valeur de x_2, **entier positif** à **partir** de laquelle la calculatrice affiche « MaError » pour e^x.	$x_2 =$

Question(s):

- La valeur de e^x pour $x < x_1$ est-elle **rigoureusement** égale à 0 ?
- La valeur de e^x pour $x > x_2$ est-elle **indéfinie** comme peut l'être la valeur de $1/x$ pour $x = 0$?
- Doit-on faire toujours confiance à la calculatrice?

Résumé :



II - **Propriétés déduites de la courbe et/ou du tableau de valeurs**

Consigne(s): Compléter le tableau suivant en vous aidant des définitions ci-dessous, de la courbe ou du tableau de valeurs.

L'ensemble[1] de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ est l'ensemble:	
Lorsque x tend vers moins l'infini ($x \to -\infty$) la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ tend vers:	
Lorsque x tend vers plus l'infini ($x \to +\infty$) la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ tend vers:	
Le **signe** de la fonction dérivée f' de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ est:	
Le **sens** de **variation** de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ est:	
Quelque soit le signe de x, le **signe** de la valeur $f(x) = \mathrm{e}^x$ est toujours:	
Valeur remarquable: pour $x = 0$, $f(x) = \mathrm{e}^x$ est égal à :	
Valeur remarquable: pour $x = 1$, $f(x) = \mathrm{e}^x$ est égal à :	

Remarque(s): La valeur e^1 sera toujours notée par la suite e, et on utilisera sa valeur exacte plutôt qu'approchée, de la même manière que l'on peut utiliser la valeur exacte du nombre π.

Consigne(s): Compléter le tableau ci-dessous

Valeur exacte	***Touche(s) calculatrice***	***Valeur approchée (à 10^{-3} près)***
π		
e		
1 / π		
1 / e		

1 L'ensemble de définition $\mathcal{D}$ d'une fonction f est l'ensemble des valeurs x présentées sur la forme d'un intervalle I pour lesquelles les valeurs $f(x)$ sont définies.

III - Fonctions dérivées, tableau de variation et tangentes.

1. Fonction(s) dérivée(s) et application

Consigne(s): Utiliser votre formulaire pour compléter les deux premières lignes du tableau ci-dessous puis compléter le en intégralité. Utiliser à la fois le fait que la fonction exponentielle est strictement positive et la règle des signes pour compléter la colonne ***signe de f '***. On pourra utiliser deux fonctions au choix dans les deux dernières lignes du tableau.

N°	***Fonction f***	***Dérivée f '***	***Signe[2] de f '***	***Variation de f***
1	$f(x) = e^{x}$	$f'(x) = e^{x}$	+	Croissante
2	$f(x) = e^{a \times x + b}$	$f'(x) = a \times e^{a \times x + b}$	Voir	Formulaire
3	$f(x) = e^{-x} = e^{-1 \times x + 0}$			
4	$f(x) = -e^{-x} = (-1) \times e^{-x}$			
5	$f(x) = e^{(2x-3)}$			
6	$f(x) = e^{(-3x+4)}$			
7	$f(x) = 4 \times e^{(\frac{1}{2}x)}$			
8	$f(x) = -5 \times e^{(x/4)}$			
9	$f(x) = -\frac{1}{3} \times e^{(-\frac{2}{3}x+3)}$			
10	$f(x) = 5 \times (1 - e^{-\frac{3}{4}x})$			
11	$f(x) = -4 \times (1 - e^{-x/2})$			
12				
13				

2. Tableau de variation (suite et fin)

Consigne(s): Sur la page n°7 du document, indiquez **toutes** les informations des points Y et A.

3. Tangentes T: $y = a \times x + b$ et tracé de tangentes

Consigne(s): Compléter le tableau ci-dessous. Tracer alors **sur votre écran** de calculatrice les tangentes au point Y et A, puis tracer les **à la main** sur la page n°7 du document.

Points	**Y**	**A**
Coordonnées des points		
Pente a de la tangente		
Équation vérifiée par b		
Valeur de b		
Équation de la tangente		
Coordonnées de deux points qui appartiennent à la tangente.		

2 Pour la fonction exp($a \times x + b$), les deux dernières colonnes ne seront pas complétées car les valeurs de a et b sont inconnues

IV - Opérations avec la fonction exponentielle: propriétés et analogie.

Consigne(s): Compléter les tableaux de valeurs en écrivant les valeurs obtenues à la calculatrice arrondies à 10^{-3} près. En comparant les valeurs obtenues sur une même ligne, déduire intuitivement les propriétés des opérations pour la fonction exponentielle (a et b deux nombres réels). Écrire les propriétés **analogues** pour la puissance de 10 (avec n et m deux entiers).

1. Produit

$e^{2} \times e^{3} =$	$e^{(2+3)} = \exp(5)$
$e^{2} \times e^{-3} =$	$e^{(2-3)} = \exp(-1)$
$e^{-2} \times e^{1,5} =$	$e^{(-2+1,5)} = \exp(-0,5)$
$e^{a} \times e^{b} =$ $e^{(a+b)}$	$10^{n} \times 10^{m} =$

2. Inverse et division

$1 / e^{2} =$	$e^{(-2)} =$
$1 / e^{-3} =$	$e^{-(-3)} = \exp(+3)$
$1 / e^{1,5} =$	$e^{(-1,5)} =$
$1 / e^{b} =$	$1 / 10^{m} =$
$e^{a} \div e^{b} =$	$10^{n} \div 10^{m} =$

3. Puissance[3]

$(e^{3})^{2} =$	$e^{(3 \times 2)} = \exp(6)$
$(e^{-3})^{1,5} =$	$e^{(-3 \times 1,5)} = \exp(-4,5)$
$(e^{-1,5})^{-0,5} =$	$e^{((-1,5) \times (-0,5))} = \exp(0,75)$
$(e^{a})^{b} =$	$(10^{n})^{m} =$

4. Équivalence et relation de passage

$a = e^{3} =$	$b = \ln(a) =$	$a = 10^{5} =$	$b = \mathrm{Log}(a) =$
$a = e^{-2} =$	$b = \ln(a) =$	$a = 10^{-4} =$	$b = \mathrm{Log}(a) =$
$a = e^{0,5} =$	$b = \ln(a) =$	$a = 10^{-9} =$	$b = \mathrm{Log}(a) =$

Équivalence: $\ln(e^{b}) =$	Équivalence: $\mathrm{Log}(10^{n}) =$
Passage: si $b^{2} = a$, alors $b =$	Passage si $\cos b = a$, alors $b =$
Passage: si $e^{b} = a$, alors $b =$	Passage si $10^{b} = a$, alors $b =$

3 Utilisez la touche ^ de votre calculatrice pour les calculs de la colonne de gauche.

V - Fonctions déduites de la fonction exponentielle

1. Fonction $f(x) = e^{-x}$ et $f(x) = -e^{-x}$

Consigne(s): A l'aide du tableau de valeur de la fonction $f(x) = e^{x}$, compléter les deux tableaux de valeurs suivants (valeurs arrondies à 10^{-1} près). Tracer alors **sur votre écran** de la calculatrice les courbes représentatives associées aux trois fonctions e^{x}, e^{-x} et $-e^{-x}$.

x	$-\infty$	...	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	3	...	$+\infty$
$f(x) = e^{-x}$		...	[redacted]										...	

x	$-\infty$	...	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	3	...	$+\infty$
$-e^{-x}$		...	[redacted]										...	

Question(s):

- Quelle(s) propriété(s) graphique(s) possèdent les courbes des fonctions e^{x} et e^{-x} ?

- Quelle(s) propriété(s) graphique(s) possèdent les courbes des fonctions e^{-x} et $-e^{-x}$?

2. Fonction $f(x) = 10^{x}$

Consigne(s): Compléter le tableau ci-dessous en donnant pour chaque valeur de x la valeur $\text{Log}(x)$ associée, le préfixe associé et le symbole utilisé. Utiliser la colonne pour $x = 10^{3}$ comme modèle.

Log x							0		3			
x	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}
Préfixe							Unité		kilo			
Symbole							[redacted]		k			

Remarque(s): Il n'y a pas de symbole dans la colonne Unité puisque le symbole dépend de la grandeur physique qui est étudiée (g pour une masse en grammes, m pour une longueur en mètre, A pour une intensité en Ampère, …)

Manque :

Manque aussi :

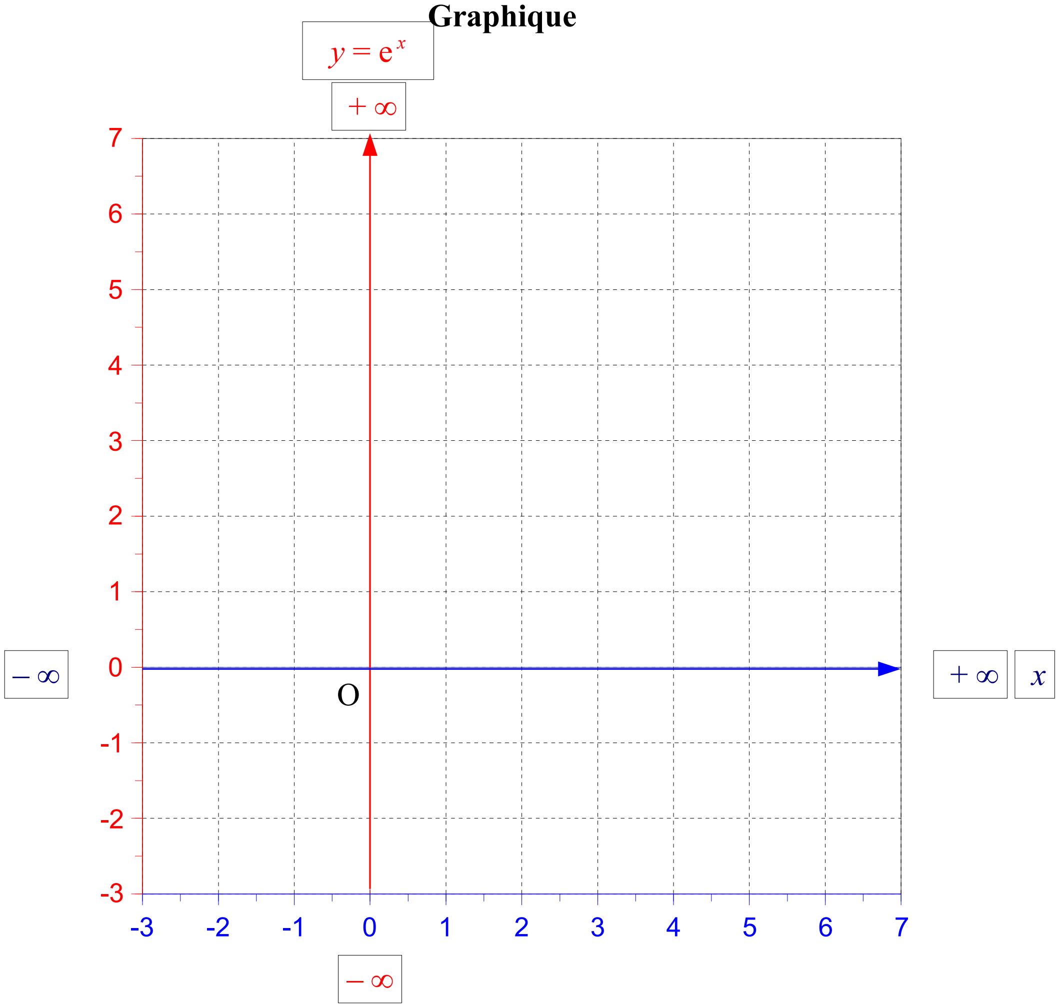
Tableau de variation

Point(s)	Y A	
x	$-\infty$ $+\infty$	Abscisse
$f'(x) = e^x$ et signe de $f'(x)$		Pente de la tangente (Signe + valeurs)
$y = f(x)$ $y = e^x$		Ordonnée (Variation + valeurs)
Signe de e^x		Signe

Tableau de valeurs (Valeurs arrondies à 10^{-2} près)

Points								Y		A				
x	$-\infty$	...	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	...	$+\infty$
$y = e^x$		...											...	

Graphique



Fonction(s) logarithme(s)

I - Expression mathématique, notation, touche(s) calculatrice et tableau de valeurs

1. Noms et notations

Consigne(s): Compléter le tableau ci-dessous en indiquant les combinaisons des touches de votre calculatrice pour accéder rapidement aux fonctions.

Fonctions	***Noms***	***Autre notation***	***Touche(s) calculatrice***
$f(x) = \ln x$	Fonction logarithme népérien	$f(x) = \ln(x)$	
$f(x) = \text{Log}\, x$	Fonction logarithme décimal	$f(x) = \ln x \div \ln 10$	

2. Tableau de valeurs

Consigne(s): Sur la page n°12 du document, compléter le tableau de valeurs et tracer la représentation graphique de la fonction logarithme népérien $f(x) = \ln x$ **(On fera attention aux échelles sur les axes du repère)**. Placer également sur la courbe les points X et B indiqués dans le tableau de valeurs.

3. Tableau de variation

Consigne(s): Sur la page n°12 du document, pré-remplir le tableau de variation de la fonction logarithme. On indiquera les coordonnées des points X et B et les informations des colonnes extrêmes du tableau de valeurs (limites en zéro plus et en plus l'infini).

II - Propriétés déduites de la courbe et/ou du tableau de valeurs

Consigne(s): Compléter le tableau suivant en vous aidant des définitions ci-dessous, de la courbe ou du tableau de valeurs.

L'ensemble[4] de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $f(x) = \ln x$ est l'ensemble:	
Lorsque x tend vers 0 ($x \to 0^+$) la fonction $f(x) = \ln x$ tend vers:	
Lorsque x tend vers plus l'infini ($x \to +\infty$) la fonction $f(x) = \ln x$ tend vers:	
Le **signe** de la fonction dérivée f' de la fonction $f(x) = \ln x$ est:	
Le sens de **variation** de la fonction $f(x) = \ln x$ est:	
Valeur remarquable: pour $x = 1$, $f(x) = \ln x$ est égal à:	
Valeur remarquable: pour $x = e^1$, $f(x) = \ln x$ est égal à:	

Remarque(s): La valeur e^1 sera toujours notée par la suite e, et on utilisera sa valeur exacte plutôt qu'approchée, de la même manière que l'on peut utiliser la valeur exacte du nombre π.

4 L'ensemble de définition $\mathcal{D}$ d'une fonction f est l'ensemble des valeurs x présentées sur la forme d'un intervalle I pour lesquelles les valeurs $f(x)$ sont définies.

III - Fonctions dérivées, tableau de variation et tangentes.

1. Fonction(s) dérivée(s)

Consigne(s): Utiliser votre formulaire pour compléter le tableau ci-dessous. Pour la deuxième fonction, utiliser votre formulaire de mathématiques de BTS et notamment la ligne $(\ln U)'$.

N°	*Fonction f*	*Dérivée f '*	*Signe[5] de f '*	*Variation de f*
1	$f(x) = \ln x$			
2	$f(x) = \ln (a \times x + b)$			

2. Tableau de variation (suite et fin)

Consigne(s): Sur la page n°12 du document, indiquer **toutes** les informations des points X et B, notamment celles sur la ligne $f'(x)$.

3. Tangentes T: $y = a \times x + b$ et tracé de tangentes

Consigne(s): Compléter le tableau ci-dessous. Tracer alors **sur votre écran** de calculatrice les tangentes au point X et B, puis tracer les **à la main** sur la page n°12 du document.

Points	**X**	**B**
Coordonnées des points		
Pente a de la tangente		
Équation vérifiée par b		
Valeur de b		
Équation de la tangente		
Coordonnées de deux points qui appartiennent à la tangente.		

5 Pour la fonction $\ln(a \times x + b)$, les deux dernières colonnes ne seront pas complétées car les valeurs de a et b sont inconnues

IV - Opérations avec la fonction logarithme: propriétés et analogie.

Consigne(s): Compléter les tableaux de valeurs en écrivant les valeurs obtenues à la calculatrice arrondies à 10^{-3} près. En comparant les valeurs obtenues sur une même ligne, déduire intuitivement les propriétés des opérations pour la fonction logarithme népérien (a et b deux nombres réels strictement positifs). Écrire les propriétés analogues pour la fonction logarithme décimal.

1. Produit

$\ln(2 \times 3) =$	$\ln 2 + \ln 3 =$
$\ln(5 \times ½) =$	$\ln 5 + \ln ½ =$
$\ln(¼ \times 3) =$	$\ln ¼ + \ln 3 =$

$\ln(a \times b) =$	$\text{Log}(a \times b) =$

2. Inverse et division

$\ln(1 / 5) =$	$-\ln 5 =$
$\ln(1 / 10) =$	$-\ln 10 =$
$\ln(1 / ¼) =$	$-\ln ¼ =$

$\ln(1 / b) =$	$\text{Log}(1 / b) =$
$\ln(a / b) = \ln(a \times 1/b) =$	$\text{Log}(a / b) = \text{Log}(a \times 1/b) =$

3. Puissance[6]

$\ln(2^3) =$	$3 \times \ln 2 =$
$\ln((1/3)^2) =$	$2 \times \ln(1/3) =$
$\ln(1 / \sqrt{5}) =$	$-½ \times \ln 5 =$

$\ln(a^b) =$	$\text{Log}(a^b) =$

4. Équivalence et relation de passage

$b = \ln 5 =$	$a = e^b =$	$b = \text{Log } 5 =$	$a = 10^b =$
$b = \ln ½ =$	$a = e^b =$	$b = \text{Log } ½ =$	$a = 10^b =$
$b = \ln ¾ =$	$a = e^b =$	$b = \text{Log } ¾ =$	$a = 10^b =$

Équivalence: $e^{(\ln a)} =$	Équivalence: $10^{(\text{Log } a)} =$
Passage: si $b = \sqrt{a}$ alors $a =$	Passage si $b = 1 \div a$ alors $a =$
Passage: si $b = \ln a$ alors $a =$	Passage si $b = \text{Log } a$ alors $a =$

6 Pour la troisième ligne, comment expliquer que l'expression $1 / \sqrt{5}$ soit équivalente à $5^{-½}$?

V - Fonctions déduites de la fonction logarithme

1. Fonction $f(x) = \text{Log } x$

Consigne(s): Compléter le tableau de valeurs suivants (valeurs arrondies à 10^{-1} près). Tracer alors **sur votre écran** de calculatrice les courbes représentatives associées aux deux fonctions ln x et Log x.

x	0	0,1	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	5	10	50	100	500	10^3
Log x														

Question(s):

- Quelle(s) propriété(s) graphique(s) possèdent les courbes des fonctions ln x et Log x ?

Tableau de variation

Point(s)		X	B		
x	0			$+\infty$	Abscisse
$f'(x) =$ et signe de $f'(x)$					Pente de la tangente (Signe + valeurs)
$y = f(x)$ $y = \ln x$					Ordonnée (Variation + valeurs)
Signe de $\ln x$					Signe

Tableau de valeurs (Valeurs arrondies à 10^{-2} près)

Points							X			B				
x	0^+	...	0,2	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	e	4	5	...	$+\infty$
$y = \ln x$		...											...	

Graphique
(échelle 2cm sur les deux axes)

$y = \ln x$