Liens transversaux:

- Maths – Chapitre “Equations différentielles” (pour la fonction exponentielle).
- Maths – Chapitre “Nombre complexe” (Niveau BTS)
- Electricité – Chapitre “Etude des circuit RC ou RL” Gain et régime transitoire
- Physique – Chapitre “Acoustique” (pour la fonction ln(x) et Log(x))

Domaines d'utilité:

- Etude de fonctions comportant une expression contenant la fonction exponentielle ou logarithme.
- Vers la croissance comparée des fonctions logarithme, puissance, et exponentielle
- Vers les fonctions logarithme décimal, exponentielle de base a, puissance de base α
- Vers les fonctions réciproques.
- Résolution d'équations faisant intervenir des termes exponentielles ou logarithme.

Objectifs:

- Connaître l'allure des courbes déduites de la fonction exponentielle.
- Connaître l'allure de la courbe logarithme
- Connaître et savoir appliquer les propriétés des opérations des deux fonctions.
- Connaîtres les relations de passages et d'équivalence liant ces deux fonctions.

Fonction exponentielle et logarithme

Courbe et propriétés déduites
Tableau de valeurs
Ensemble de définition
Signe
Comportement (vers la notion de limite)

Dérivées et tangentes particulières
Schéma, définition et propriétés

Opérations: propriétés et analogie
Produit, inverse, division, puissance.

Pré-requis

- Etude d'une fonction (tableau de valeurs, construction d'une courbe)
- Dérivée et tangente à une courbe en un point donné.
- Utilisation ponctuelle calculatrice.

Décroissance

Activité n° 1: Soit la fonction $y = f(x) = 6 \times \exp(-x/6)$
On étudiera cette fonction uniquement pour $x \geq 0$.
1. Compléter le tableau de valeurs et placer les points correspondants **sans** les relier.
2. Donner la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.

$f'(x) =$ ....

3..a) En utilisant le chapitre sur la fonction exponentielle, donner le signe de la fonction dérivée $f'(x)$.

....

b) Placer dans le tableau de variation le signe de $f'(x)$ et les flèches associées pour $f(x)$.
4. a) Donner les coordonnées de Y($x = 0$; $y =$ ....)
b) Donner la valeur de $f'(x)$ pour le point Y.

$f'(x_Y) = f'(0) =$ ....

c) Indiquer toutes les informations concernant le point Y dans le tableau de variation.
d) Construire un triangle rectangle permettant de tracer la tangente T_Y . Tracer la tangente T_Y et la courbe (C).
5. Pour x tendant vers + l'infini ($x \to +\infty$), vers quelle valeur tend $f(x)$. Indiquer ces valeurs dans le tableau de variation. Compléter la ligne associée au signe de $f(x)$.

Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

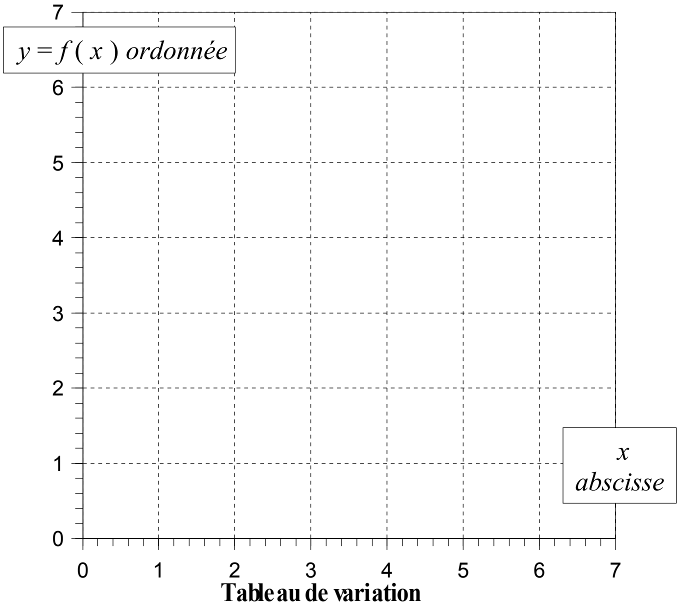


Tableau de variation

Nom des points		
x		Abscisse (valeur)
$f'(x)$		Pente (signe)
$y = f(x)$		Ordonnée (flèche + valeur)
Signe de $f(x)$		Signe

Décroissance: comparaison

Activité n° 2: Soit la fonction $y = f_1(x) = 6 \times \exp(-x/6)$ de l'activité n°1. Soit $y = f\ (x) = 6 \times \exp(-x/3)$.
Soit (C_1) et (C) les courbes associées pour $x \geq 0$.
1. Tracer (C_1). Pour (C), compléter le tableau de valeurs et placer les points correspondants **sans** les relier.
2. Donner la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.

$f'(x) =$ ....

3. a) En utilisant le chapitre sur la fonction exponentielle, donner le signe de la fonction dérivée $f'(x)$.

....

b) Placer dans le tableau de variation le signe de $f'(x)$ et les flèches associées pour $f(x)$.
4. a) Donner les coordonnées de Y($x = 0$; $y =$ ....)
b) Donner la valeur de $f'(x)$ pour le point Y.

$f'(x_Y) = f'(0) =$ ....

c) Indiquer toutes les informations concernant le point Y dans le tableau de variation. Donner alors l'équation complète de la tangente T_Y avant de tracer T_Y et (C)

....

Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

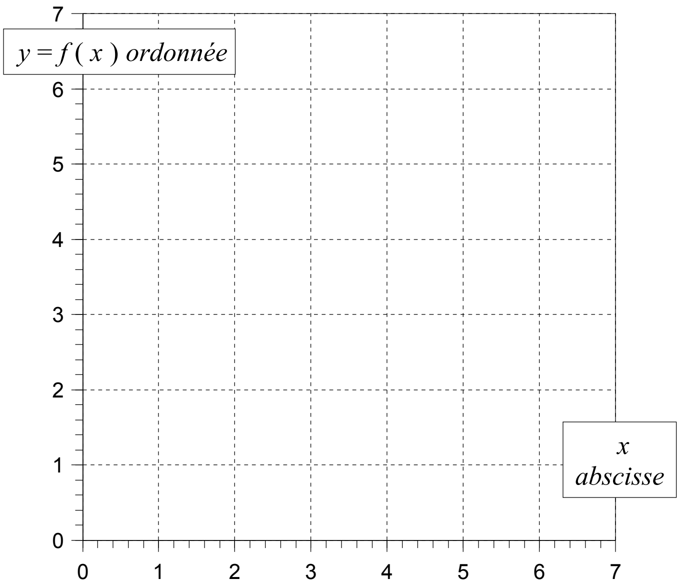


Tableau de variation

Nom des points		
x		Abscisse (valeur)
$f'(x)$		Pente (signe)
$y = f(x)$		Ordonnée (flèche + valeur)
Signe de $f(x)$		Signe

Croissance

<u>Activité n° 3:</u> Soit (C) la courbe associée à la fonction:

$$y = f(x) = 6 \times [1 - \exp(-x/3)]$$

On étudiera cette fonction uniquement pour $x \geq 0$.

1. Compléter le tableau de valeurs et placer les points correspondants **en** les reliant.

2. Développer la fonction $f(x)$ avant de donner sa fonction dérivée $f'(x)$.

$f'(x) =$ ....

3. Placer dans le tableau de variation le signe de $f'(x)$ et les flèches associées pour $f(x)$

4. a) Donner les coordonnées de Y($x = 0$; $y =$ ....)

b) Donner la valeur de $f'(x)$ pour le point Y.

$f'(x_Y) = f'(0) =$ ....

c) Indiquer toutes les informations concernant le point Y dans le tableau de variation. Donner alors l'équation complète de la tangente T_Y avant de tracer T_Y et (C)

....

5. Pour x tendant vers + l'infini ($x \to +\infty$), vers quelle valeur tend $f(x)$. Indiquer ces valeurs dans le tableau de variation. Compléter la ligne associée au signe de $f(x)$.

6. Donner <u>graphiquement</u> la valeur de x tel que $f(x) = 5{,}4$

Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

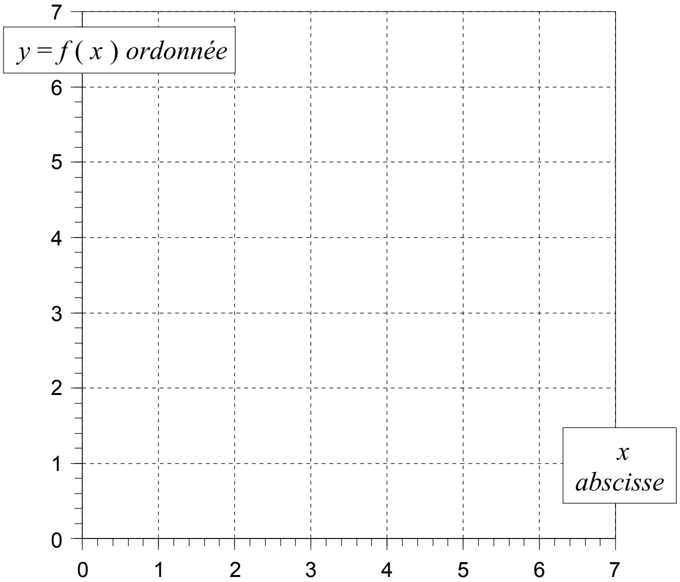


Tableau de variation

Nom des points		
x		Abscisse (valeur)
$f'(x)$		Pente (signe)
$y = f(x)$		Ordonnée (flèche + valeur)
Signe de $f(x)$		Signe

Croissance: résolution de $f(x) = b$

<u>Activité n° 4:</u> Soit (C) la courbe associée à la fonction:

$$y = f(x) = 6 \times [1 - \exp(-x/2)] \quad \text{pour } x \geq 0.$$

1. Compléter le tableau de valeurs et placer les points correspondants **sans** les relier. Tracer la courbe (C).

2. Donner $f'(x)$ (penser à développer $f(x)$ avant!)

$f'(x) =$ ....

3. Compléter le tableau de variation (signe + flèches)

4. Pour x tendant vers + l'infini ($x \to +\infty$), vers quelle valeur tend $f(x)$. Indiquer ces valeurs dans le tableau de variation. Compléter la ligne associée au signe de $f(x)$. On notera y_{max} la valeur de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Que vaut y_{max} ? $y_{max} =$ ....

5. On appelle “temps de montée à 90%” la valeur de x pour laquelle $f(x)$ atteint 90% de sa valeur maximale.

<u>Graphiquement</u>, que vaut x ? $x =$ ....

6. En identifiant le terme de l'exponentielle à $\exp(-x/\tau)$, quelle est la valeur de τ, appellé “constante de temps” ?

$\tau =$ ....

7. Comparer le temps de montée (question **5.**) et la valeur de $\tau \times \ln 10 \approx \tau \times 2{,}3$

Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

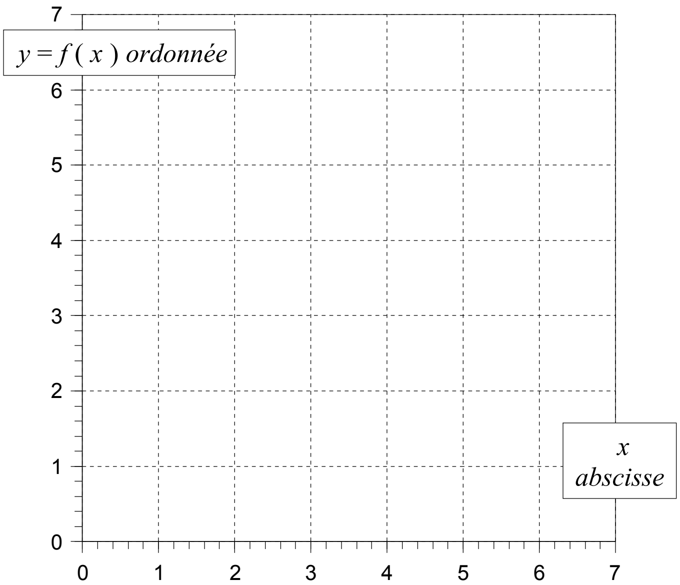


Tableau de variation

Nom des points		
x		Abscisse (valeur)
$f'(x)$		Pente (signe)
$y = f(x)$		Ordonnée (flèche + valeur)
Signe de $f(x)$		Signe

Décroissance: constante et période radioactive

Activité n° 5: Soit (C) la courbe associée à la fonction:

$y = f(x) = 6 \times \exp(-x/4)$ pour $x \geq 0$.

1. Compléter le tableau de valeurs et placer les points correspondants **sans** les relier. Tracer la courbe (C).

2. Donner la fonction dérivée $f'(x)$.

$f'(x) =$ ....

3. Compléter le tableau de variation (signe + flèches)

4. On appelle “Période radioactive” T le décalage en x pour laquelle la valeur de $y = f(x)$ diminue de moitié. On écrit mathématiquement la relation **(1)** $f(x + T) = ½ \times f(x)$. Déterminer <u>graphiquement</u> T pour $y = 6$ et $y = 4$. Que remarque-t-on ?

T (pour $y = 6$) = ... ; T (pour $y = 4$) = ...

5. En identifiant le terme de l'exponentielle à $\exp(-\lambda \times x)$, quelle est la valeur de λ , appellé “constante radioactive” ?

$\lambda =$ ....

6. Comparer la période radioactive T (question **4.**) et la valeur de $(1/\lambda) \times \ln 2 = (\ln 2)/\lambda$.

....

7. Démontrer cette formule en utilisant la relation **(1),** la fonction $f(x) = \exp(-\lambda \times x)$ et les propriétés de e^x et $\ln x$.

Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

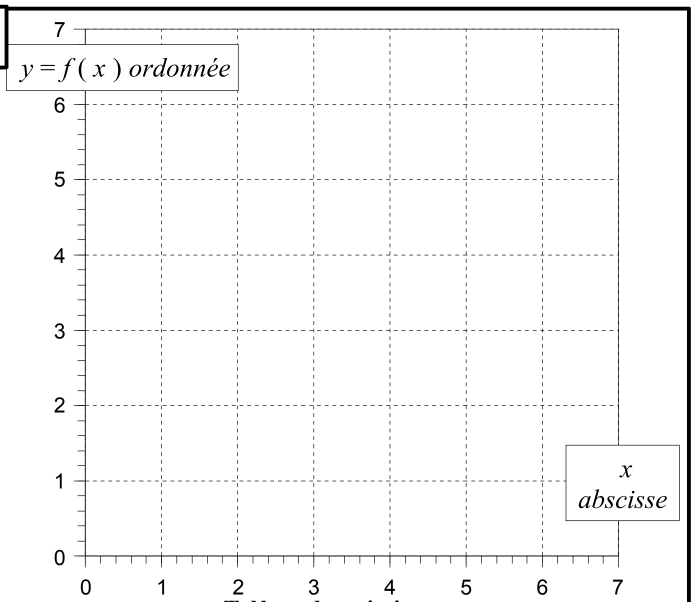


Tableau de variation

Nom des points		
x		Abscisse (valeur)
$f'(x)$		Pente (signe)
$y = f(x)$		Ordonnée (flèche + valeur)
Signe de $f(x)$		Signe

Croissance: constante de temps et temps de montée à 90%

Activité n° 6: Soit (C_4) la courbe associée à la fonction de l'activité n°4: $y = f_4(x) = 6 \times [1 - \exp(-x/2)]$ et (C_6) la courbe associée à $y = f_6(x) = 6 \times [1 - \exp(-x/1{,}0)]$

On étudiera ces fonctions pour $x \geq 0$.

1. Compléter les tableaux de valeurs et placer les points correspondants. Tracer les courbes (C_4) et (C_6).

2. Pour x tendant vers + l'infini ($x \to +\infty$), vers quelle valeur tend les deux fonctions. On notera y_{max} cette valeur.

Que vaut y_{max} ? $y_{max} =$ ....

3. On appelle “temps de montée à 90%”, notée $t_{90\%}$ la valeur de x pour laquelle la courbe atteint 90% de sa valeur maximale. Donner graphiquement la valeur de $t_{90\%}$ pour les 2 courbes.

Pour (C_4) $t_{90\%} =$ .... ; Pour (C_6) $t_{90\%} =$ ....

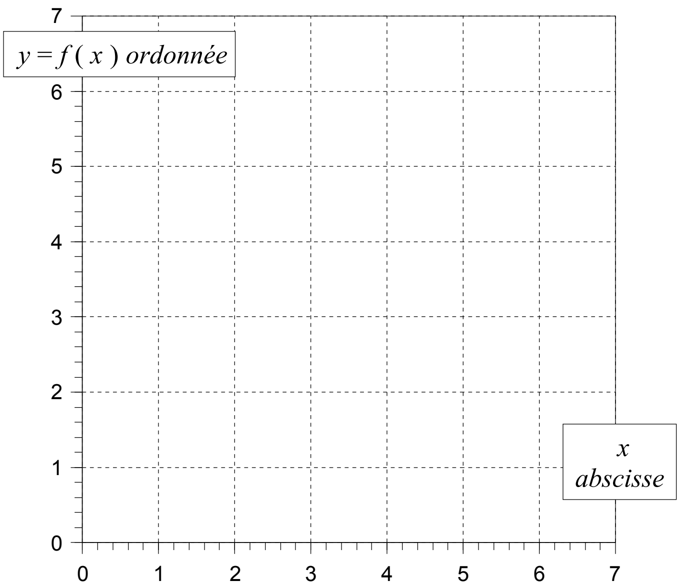
4. En identifiant le terme de l'exponentielle à $\exp(-x/\tau)$, quelle est la valeur de τ , appellé “constante de temps”, pour chacune des courbes.

Pour (C_4) $\tau =$ .... ; Pour (C_6) $\tau =$ ....

5. Comparer le temps de montée (question **6.**) et la valeur de $\tau \times \ln 10 \approx \tau \times 2{,}3$ pour chacune des deux courbes.

Pour (C_4)......................... ; Pour (C_6) ....

6. Quelle est la relation entre $t_{90\%}$ et τ et comment varie $t_{90\%}$



en fonction de τ ?

....

7. Démontrer cette formule en utilisant la définition de $t_{90\%}$ la fonction $f(x) = \exp(-x/\tau)$ et les propriétés de e^x et $\ln x$.

Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

Décroissance: suite et fonction exponentielle

Activité n° 7:

Partie A.

Par faute de natalité suffisante, un pays de 6 millions d'habitants pert 10% de sa population par an.

1. Soit n le rang de l'année et U_n la population en millions à l'an n. Donner U_0 , U_1 et U_2 puis la relation entre U_{n+1} et U_n .

....

....

2. Donner la nature de la suite (U_n) et la raison de la suite, puis l'expression de U_n en fonction de U_0 **et** de la raison de la suite. ?

....

....

3. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous et placer les points correspondants de coordonnées ($x = n$; $y = U_n$) **sans** les relier.

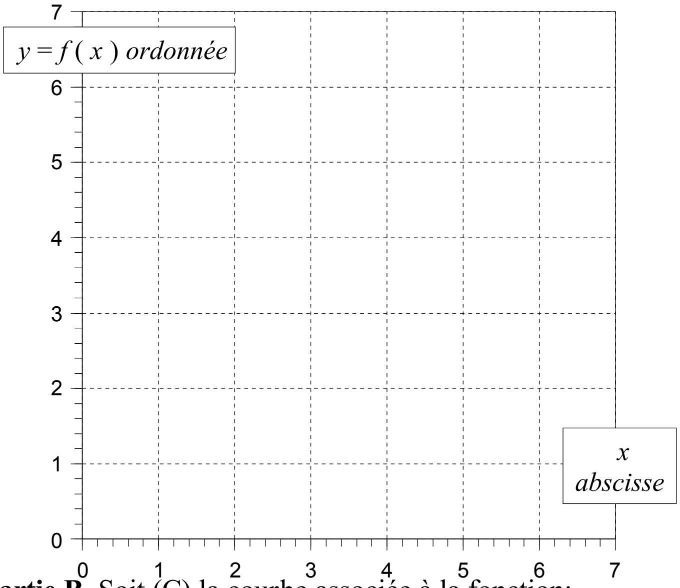
Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

4. Déterminer graphiquement la valeur de n pour laquelle la population est divisée par 2 ?

....

5. Idem (par calcul) lorsque la population est divisée par 3 ?



Partie B. Soit (C) la courbe associée à la fonction:

$$y = f(x) = 6 \times \exp[\, x \times \ln(0,9)\,] \text{ pour } x \geq 0.$$

1. Calculer ln(0,9) puis compléter le tableau de valeurs et placer les points correspondants **en** les reliant.

Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

2. Que remarque-t-on? Comment peut-on l'expliquer ?

....

3. Calculer la valeur de x telle que $f(x) = 2$ en utilisant les propriétés de la fonction e^x et $\ln x$?

Croissance: suite et fonction exponentielle

Activité n° 8:

Partie A.

Une entreprise produit 2 millions d'unités par an et investit pour obtenir un taux d'augmentation de 20% par an.

1. Soit n le rang de l'année et U_n la production en millions à l'an n. Donner U_0 , U_1 et U_2 puis la relation entre U_{n+1} et U_n .

....

....

2. Donner la nature de la suite (U_n) et la raison de la suite, puis l'expression de U_n en fonction de U_0 **et** de la raison de la suite. ?

....

....

3. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous et placer les points correspondants de coordonnées ($x = n$; $y = U_n$) **sans** les relier.

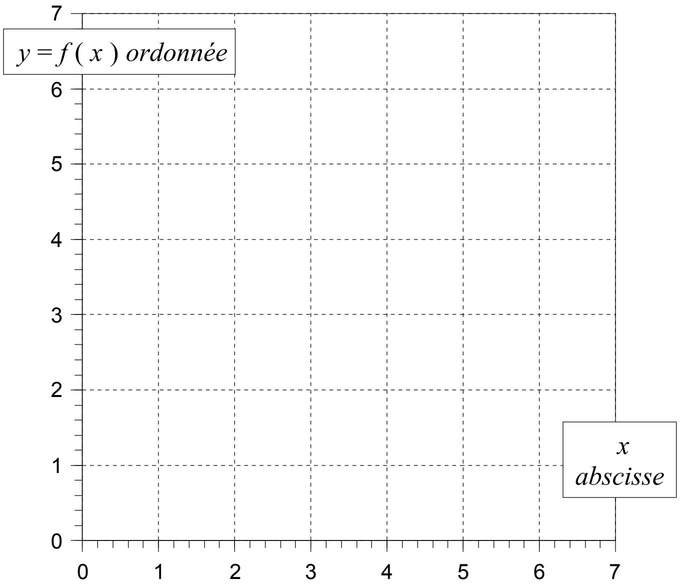
Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

4. Déterminer graphiquement les valeurs de n pour lesquelles la production est multipliée par 2 ? par 3 ?

....

5. Idem (calcul) lorsque la production est multipliée par 10?



Partie B. Soit (C) la courbe associée à la fonction:

$$y = f(x) = 2 \times \exp[\, x \times \ln(1,20)\,] \text{ pour } x \geq 0.$$

1. Calculer ln(1,20) puis compléter le tableau de valeurs et placer les points correspondants **en** les reliant.

Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

2. Que remarque-t-on? Comment peut-on l'expliquer ?

....

3. Calculer la valeur de x telle que $f(x) = 20$ en utilisant les propriétés de la fonction e^x et $\ln x$?