Équations différentielles

(Auteur: M. Basnary S. – Version 2012)

I – Équation différentielle du 1er ordre (E)

Une variable x (ou t), une inconnue: $y(x)$ avec $y'(x)$

Trois **fonctions** a, b et d de la variable x.

(E): $a(x) \times y'(x) + b(x) \times y(x) = d(x)$

➢ (E): $y'(x) - 2\,y(x) = 4\,x$

II – Solution de l'équation homogène (E_0): $y_0(x)$

Identification de a et b et vérification des hypothèses:

$\forall\, x \in I$, $a(x) \neq 0$ et a et b sont des fonctions dérivables.

Théorème: $g(x) = b(x) / a(x)$, G primitive de g :

$y_0(x) = k \times e^{-G(x)}$ avec k un réel quelconque.

➢ $a(x) = 1$, $b(x) = -2$, $a(x) \neq 0$, $a'(x) = 0$, $b'(x) = 0$

$g(x) = b(x)/a(x) = -2$, $G(x) = -2x$, $y_0(x) = k \times e^{2x}$

III – Solution particulière de (E): $y_p(x)$ et méthodes

Forme **complète** $y_p(x) = -2\,x - 1$	Forme à **coefficients** $a, b, \ldots$) $y_p(x) = (\,a\,x + b\,)$
Calcul de la dérivée $y_p'(x)$ (Attention forme de $y_p(x)$)	
$y_p'(x) = -2$	$y_p'(x) = a$
Par vérification	**Par identification**
Calculer le 1er membre de (E) avec $y_p(x)$ et $y_p'(x)$ $y_p' - 2y_p = -2 - 2(-2\,x - 1)$	Écrire (E) avec $y_p(x)$ et $y_p'(x)$ et ordonner les termes. (E): $a - 2\,(\,a\,x + b\,) = 4\,x$ (E): $-2\,a\,x + a - 2\,b = 4\,x$
Développer, simplifier $y_p' - 2y_p = -2 + 4\,x + 2$	Identifier termes à termes, écrire le système vérifié par les coefficients $a, b, \ldots$
On doit retrouver le 2nd membre de (E) $y_p' - 2y_p = 4\,x$	Résoudre le système $-2\,a = 4 \quad \Leftrightarrow a = -2$ $a - 2\,b = 0 \Leftrightarrow b = a/2 = -1$
$y_p(x) = -2\,x - 1$ est bien solution particulière de (E)	Récrire $y_p(x)$. $y_p(x) = (\,a\,x + b\,) = -2\,x - 1$

IV – Solution générale de (E): $y_g(x) = y_0(x) + y_p(x)$

➢ $y_g(x) = y_0(x) + y_p(x) = k \times e^{2x} - 2\,x - 1$

V – Solution f de (E) avec condition initiale (CI)

La condition initiale (CI) est donnée $f(x_0) = y_0$.

Résoudre l'équation $f(x_0) = y_0$. Donner k puis $f(x)$.

➢ $f(0) = 0 \quad \Leftrightarrow k \times e^{2\times 0} - 2 \times 0 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow k = 1$

➢ $f(x) = e^{2x} - 2\,x - 1$

Équation différentielle (E):
- Une variable x (ou t)
- Une fonction $y(x)$ ou $f(t)$
- Ses dérivées $y'(x)$, $y''(x)$ (ou dy/dx, d^2y/dx^2)
- Une fonction $d(x)$
- Une équation (E):

(E): $E(x, y(x), y'(x), \ldots) = d(x)$

1er membre 2nd membre

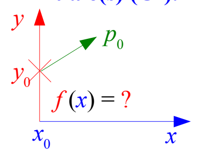
Une ou deux conditions initiales (CI)

$f(x_0) = y_0$

et/ou

$f'(x_0) = p_0$

Fonction f solution de (E) et vérifiant des condition(s) initiale(s) (CI).



Équation différentielle homogène ou sans 2nd membre

(E_0):

$E(x, y, y', \ldots) = 0$

1er Mbre 2nd Mbre

Solution: $y_0(x)$ avec constantes (k ou λ et μ)

Solution particulière de (E): $y_p(x)$

L'expression (**complète** ou bien à **coefficients** $a, b, \ldots$) est **donnée**.

Calculer $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$

Méthode par vérification | Méthode par identification

Expression complète de $y_p(x)$

Solution générale de (E): $y_g(x)$

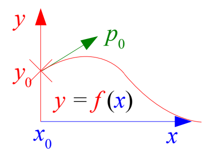
$y_g(x) = y_0(x) + y_p(x)$

avec constantes (k ou λ et μ)

f solution de $(E) \Leftrightarrow f(x) = y_g(x)$

Équation ou système d'équations vérifiées par k ou λ et μ: les constantes de $y_g(x)$ et de $f(x)$

Expression complète de la fonction f: vers l'étude de fonction



Remarques:

La résolution d'une équation différentielle conduit à l'expression complète d'une fonction $f(x)$. Dans un sujet d'examen, un problème est constitué de 2 parties.

A) Résolution d'équation différentielle.

B) Étude d'une fonction $f(x)$.

Attention donc au lien qui peut exister entre les deux parties. S'il existe, comme $f(x) = y_g(x) = y_0(x) + y_p(x)$, on peut trouver des informations précieuses sur $y_p(x)$, les valeurs des constantes, rien qu'à la lecture de l'énoncé.

I – Équation différentielle du 2nd ordre (E)

Une variable x (ou t), une inconnue: $y(x)$ avec $y'(x)$ et $y''(x)$

Trois **réels** a, b, c et une **fonction** d de la variable x.

(E): $a \times y''(x) + b \times y'(x) + c \times y(x) = d(x)$

➢ (E): $y'' - 3\,y' - 4\,y = -5\,e^{-x}$

II – Solution de l'équation homogène (E_0): $y_0(x)$

Équation caractéristique: $a \times r^2 + b \times r + c = 0$ et solutions:

$\Delta = (b)^2 - 4\,ac$; $\Delta \geq 0$ $\quad r = (-b \pm \sqrt{\Delta}) \div (2a)$

$\Delta < 0$; $\sqrt{\Delta} = \pm \sqrt{|\Delta|} \times \boldsymbol{i}$ $\quad r = \alpha \pm \beta \times \boldsymbol{i}$ avec $\alpha = -b \div (2a)$

où $\boldsymbol{i}^2 = -1$ $\quad$ et $\beta = \sqrt{|\Delta|} \div (2a)$ (prendre $\beta > 0$)

Théorème: $y_0(x)$ dépend du signe de Δ, r_1 et r_2. (cf. formulaire)

➢ $a = 1$, $b = -3$, $c = -4$, $\Delta = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$, $r_1 = 4$, $r_2 = -1$

$y_0(x) = \lambda \times e^{4x} + \mu \times e^{-x}$ (avec λ et μ deux réels)

III – Solution particulière de (E): $y_p(x)$ et méthodes

Forme **complète** $y_p(x) = x \times e^{-x} = (1\,x + 0) \times e^{-x}$	Forme à **coefficients** $a, b, \ldots$) $y_p(x) = (a\,x + b) \times e^{-x}$
Calcul des dérivées $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ (Attention forme de $y_p(x)$)	
$y_p'(x) = (-x + 1) \times e^{-x}$ $y_p''(x) = (\,x - 2) \times e^{-x}$	$y_p'(x) = (-a\,x + a - b) \times e^{-x}$ $y_p''(x) = (a\,x - 2a + b) \times e^{-x}$
Par vérification	**Par identification**
Calculer le 1er membre de (E) avec $y_p(x)$, $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ $y_p'' - 3\,y_p' - 4\,y_p = (\,x - 2) \times e^{-x}$ $-3\,(-x + 1) \times e^{-x}$ $-4\,(1\,x + 0) \times e^{-x}$	Écrire (E) avec y_p, y_p' et y_p''. Regrouper et ordonner. (E): $(a\,x - 2a + b) \times e^{-x}$ $-3\,(-a\,x + a - b) \times e^{-x}$ $-4\,(a\,x + b) \times e^{-x}$ $= (\,0\,x - 5\,) \times e^{-x}$
Développer, regrouper, simplifier et ordonner les termes $y_p'' - 3\,y_p' - 4\,y_p = (0\,x - 5) \times e^{-x}$	Identifier termes à termes, écrire le système vérifié par les coefficients $a, b, \ldots$
On doit retrouver le 2nd membre de (E) $y_p'' - 3\,y_p' - 4\,y_p = -5 \times e^{-x}$	Résoudre le système $0\,a = 0 \quad \Leftrightarrow a$ réel $-5\,a + 0\,b = -5 \Leftrightarrow a = 1, b \in \mathbb{R}$
$y_p(x) = x \times e^{-x}$ est bien solution particulière de (E)	Récrire $y_p(x)$. (<u>*choix*</u> $b = 0$) $y_p(x) = (\,1\,x + 0\,) \times e^{-x} = x \times e^{-x}$

IV – Solution générale de (E): $y_g(x) = y_0(x) + y_p(x)$

➢ $y_g(x) = y_0(x) + y_p(x) = \lambda \times e^{4x} + \mu \times e^{-x} + x \times e^{-x}$

➢ $y_g'(x) = y_0'(x) + y_p'(x) = 4\lambda\,e^{4x} - \mu\,e^{-x} + (-x + 1) \times e^{-x}$

V – Solution f de (E) avec conditions initiales (CI)

Résoudre le système vérifié par λ et μ. Récrire $f(x)$.

➢ $f(0) = 2 \quad \Leftrightarrow \lambda + \mu = 2 \quad$ © $\Leftrightarrow 5\lambda = 0$ (© + ®)

➢ $f'(0) = -1 \quad \Leftrightarrow 4\lambda - \mu = -2 \quad$ ® $\Leftrightarrow \mu = 2$

➢ $f(x) = 2 \times e^{-x} + x \times e^{-x}$ ou bien $f(x) = (\,x + 2\,) \times e^{-x}$