

## I – Pré-requis: définition(s) et notation(s).

- **Monôme**: Soit  $n$  un entier positif ou nul ( $n \in \mathbb{N}$ ) et  $a_n$  un réel ( $a_n \in \mathbb{R}$ ), on appelle **monôme** de **degré** ou d'**ordre**  $n$  la **fonction**  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = a_n \times x^n$ .

$f$  est un **monôme** de **degré**  $n \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_n \times x^n$ .

Ex:  $f(x) = -3, 2x, -x^2, \frac{1}{4}x^3, \dots$  mais pas  $1/x^3$  ou  $2\sqrt{x}$ .

- **Polynôme**: Un **polynôme** est une combinaison linéaire de plusieurs **monômes**, ordonnés ou pas (degré  $\nearrow$  ou  $\searrow$ ). Le terme de rang  $p$  est le **monôme** de degré  $p$ . Le **degré** du **polynôme** noté  $d^\circ(P)$  ou  $n$  est le rang  $p$  maximum.

$P$  est un **polynôme**  $\Leftrightarrow P(x) = \sum a_p \times x^p$  avec  $d^\circ(P) = n$

| Polynôme                                | Degré $n$ | Terme de rang $p$      |
|-----------------------------------------|-----------|------------------------|
| $P(x) = -3 + 2x - x^2 + \frac{1}{4}x^3$ | $n = 3$   | $p = 0$ $-3$           |
| $P(x) = -x^3 + 2x^4 - x + 5$            | $n = 4$   | $p = 2$ $0 \times x^2$ |

- **Notation factorielle**: Soit  $n$  un entier positif ou nul ( $n \in \mathbb{N}$ ), la notation factorielle associée à  $n$  se note  $n!$ , se lit « factorielle  $n$  » et est égale au produit des  $n$  premiers entiers. Pour  $n = 0$  on a par propriété  $0! = 1$ .

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times i \times \dots \times (n-1) \times n = \prod i$

Ex:  $1! = 1, 2! = 1 \times 2 = 2, 3! = 2! \times 3 = 6, 4! = 24$ .

- **Polynôme généré par un terme général d'ordre  $n$  (ou  $p$ )**: Chaque **monôme** s'obtient en appliquant la formule du terme général en remplaçant  $n$  (ou  $p$ ) par  $0, 1, 2, \dots$

| Terme général et polynôme généré par ce terme général. |                                         |
|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $x^n / n!$                                             | $f(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24$ |
| $(-1)^p \times x^{2p+1} / (2p+1)!$                     | $f(x) = x - x^3/6 + x^5/120$            |

## II – Développement limité de $f$ au voisinage de $x = 0$ .

- **Définition**: Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  avec  $0 \in I$ . La fonction  $f$  admet un développement limité (DL) au voisinage de  $x = 0$  d'ordre  $n$  si la fonction  $f$  s'écrit:

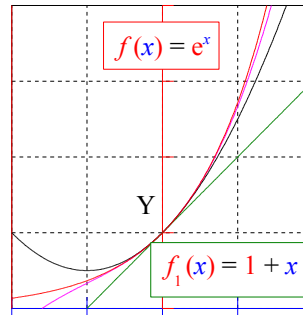
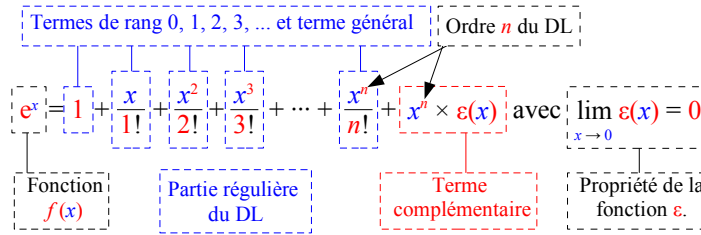
$$f(x) = f_n(x) + x^n \times \varepsilon(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \times \varepsilon(x)$$

avec  $a_n = (1/n!) \times f^{(n)}(0)$  et pour  $x \rightarrow 0, \varepsilon(x) \rightarrow 0$ .

- Notations

$f_n(x)$  : Partie **régulière** du DL d'ordre  $n$ .  
(Le DL d'un polynôme  $P$  est identique au polynôme)  
 $x^n \times \varepsilon(x)$  : Terme **complémentaire** du DL.  
 $a_0, a_1 x, a_2 x^2 \dots$  : Termes de rang  $0, 1, 2, \dots$  du DL.  
 $n$  : Ordre (imposé) du DL  
 $a_n x^n$  : Terme général (voir formulaire).  
 $f^{(n)}(0)$  :  $n^{\text{ième}}$  **dérivée** de  $f$  appliquée en  $x = 0$

## Développement limité d'une fonction $f$ au voisinage de $x = 0$ (Auteur : S. Basnary – Version 2013)

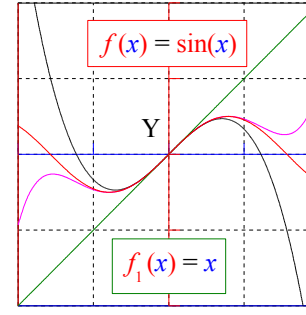


$$f_2(x) = 1 + x + x^2/2$$

$$f_3(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$$

Tangente  $T_Y: y = x + 1$

| $x$                | 0           |
|--------------------|-------------|
| Signe de $x^2/2$   | +           |
| Posit° $C_f / T_Y$ | $C_f > T_Y$ |



$$f_3(x) = x - x^3/6$$

$$f_5(x) = x - x^3/6 + x^5/120$$

Tangente  $T_Y: y = x$

| $x$                | 0           |
|--------------------|-------------|
| Signe de $-x^3/6$  | +           |
| Posit° $C_f / T_Y$ | $C_f > T_Y$ |

## III – Propriétés déduites d'un DL d'une fonction $f$ .

- L'intervalle  $I$  centré en  $x = 0$  pour lequel les courbes  $C_f$  et  $C_{f_n}$  se superposent est d'autant + large que l'ordre  $n$  est élevé.
- Le terme  $a_0 + a_1 x$  du DL est l'équation  $y = a x + b$  de la **tangente**  $T_Y$  à la courbe  $C_f$  au point  $Y$  d'abscisse  $x = 0$ .
- L'étude du **signe** du terme qui suit dans le DL de  $f$  (de rang 2 ou 3) au voisinage de  $x = 0$  donne la **position** (dessus ou dessous) de la courbe  $C_f$  par rapport à la **tangente**  $T_Y$  :
- $$\text{Signe} > 0 \Leftrightarrow C_f > T_Y ; \text{Signe} < 0 \Leftrightarrow C_f < T_Y .$$
- Une valeur approchée de l'intégrale  $I$  de la fonction  $f$  sur un intervalle  $I = [a; b]$  proche de  $x = 0$  s'obtient en effectuant l'intégrale  $I_n$  de la fonction  $f_n$ : partie régulière du DL de  $f$ .

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_n = \int_a^b f_n(x) dx$$

## IV – Règles d'opérations sur les DL d'ordre $n$ de $f$ .

- **Règle n°1**: Toutes les opérations ne portent que les parties **régulières** des développements limités.
- **Règle n°2**: On ne fait apparaître dans l'expression d'un DL que les termes de rang  $p$  inférieur ou égal à l'ordre  $n$  imposé du DL.
- **Règle n°3**: Un DL ne contient qu'un seul et unique terme **complémentaire** contenant:  
Le nom de la variable ( $x$  ou  $t$ )  
L'ordre  $n$  imposé du DL (sous la forme  $x^n$  ou  $t^n$ )  
La fonction  $\varepsilon$  (sous la forme  $+ x^n \times \varepsilon(x)$  ou  $+ t^n \times \varepsilon(t)$ )  
La **limite** de  $\varepsilon$  en  $0$  ( $\lim \varepsilon(x) = 0$  ou  $\lim \varepsilon(t) = 0$ )

## V – Opérations sur les DL d'ordre $n$ de $f$ .

- **Composition**:

Ex:  $f(x) = e^{-x^2}$  à l'ordre  $n = 2$ .

- a) Identifier la fonction et donner son DL à l'ordre  $n$ .

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + t^2 \times \varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(t) = 0.$$

- b) Remplacer  $t$  par son équivalent dans  $f$ , ici  $t = -x^2$ , en respectant les règles n°1 et n°3.

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{1}{2}(-x^2)^2 + x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(x) = 0$$

- c) Appliquer la règle n°2 pour le DL final.  $x \rightarrow 0$

$$f(x) = 1 - x^2 + x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(x) = 0.$$

- **Combinaison linéaire**:  $\lambda \times f + \mu \times g$  avec  $\lambda$  et  $\mu \in \mathbb{R}$

Ex:  $f(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$  à l'ordre  $n = 2$ .

- a) Identifier la fonction et donner son DL à l'ordre  $n$ .

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(x) = 0.$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{1}{2}(-x)^2 + x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(x) = 0.$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(x) = 0.$$

- b) Appliquer la règle n°1 et/ou n°3 pour  $\lambda$  et  $\mu$  et  $f$ .

$$\frac{1}{2}e^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(x) = 0.$$

$$\frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(x) = 0.$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(x) = 0.$$

- **Produit de DL**:  $f \times g$

Ex:  $f(x) = (x+2) \times e^{-x}$  à l'ordre  $n = 3$ .

- a) Identifier les fonctions et donner leur DL à l'ordre  $n$ .

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(x) = 0.$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(x) = 0.$$

- b) Appliquer la règle n°1 et n°2 à chacun des termes du produit  $f \times g$ , puis faites la somme termes à termes.

$$x \times e^{-x} = 0 + x - x^2 + x^2/2 + x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(x) = 0.$$

$$2 \times e^{-x} = 2 - 2x + x^2 - x^2/3 + x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(x) = 0.$$

$$f(x) = 2 - x + x^3/6 + x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim \varepsilon(x) = 0.$$