Exercices de Mathématiques

Thème:

Dénombrement

Table des matières

EXERCICE n°1: Les échiquiers....2
1. Échiquier 7 × 5 cases....2
2. Autres échiquiers....2
EXERCICE n°2: Nombres de mains au poker de 32 et 52 cartes....3
1. Nombre de mains différentes....3
2. Nombre de « quinte flush »....3
3. Nombre de « carré »....3
4. Nombre de « full »....4
5. Nombre de « couleur » ou flush....4
6. Nombre de « quinte » ou suite:....5
7. Nombre de « brelan »....5
8. Nombre de « double paire »....6
9. Nombre de « paire »....6
10. Nombre de « carte haute » ou combinaison restante....7
11. Récapitulatif des nombres de mains et probabilités associées....7
EXERCICE n°3: Le jeu du pile ou face....8
EXERCICE n°4: Le jeu du « Bunto »....9
EXERCICE n°5: Le chapeau du magicien....10

EXERCICE n°1: *Les échiquiers*

1. Échiquier 7 × 5 cases

Consignes: Sur l' « échiquier » ci-dessous, on part de la case I en bas à gauche pour aller sur la case F en haut à droite. Les seuls déplacements possibles sont: **horizontalement vers la droite (R comme Right)** ou bien **verticalement vers le haut (U comme Up)**.

Combien y a-t-il de chemin différents pour relier les deux cases opposés I et F de l'échiquier?

						F
I						

2. Autres échiquiers

Consignes: Appliquer le même raisonnement pour un échiquier d'échec (8 × 8) et pour un échiquier de dames (10 × 10).

EXERCICE n°2: *Nombres de mains au poker de 32 et 52 cartes.*

Consigne(s): On considère l'expérience aléatoire suivante: On tire sans remise 5 cartes d'un jeu de cartes (32 ou 52 cartes). On réalise ainsi au poker ce qu'on appelle une main. L'objectif est de déterminer le nombre de mains et la probabilité associée pour réaliser les combinaisons du poker qui sont la quinte flush, le carré, le full, la couleur, la suite (ou quinte), le brelan, la double paire, la paire et carte haute. On donnera les probabilités en % arrondi à 10^{-4} près (*par exemple:* p = 1,2345 %)

1. Nombre de mains différentes

En utilisant les résultats du tableau récapitulatif, donnez le nombre total N de mains différentes réalisables au poker?

Jeu: 32 cartes	Jeu: 52 cartes
$N = C_{32}^{5}$ **= 201 376**	$N = C_{52}^{5}$ **= 2 598 960**

2. Nombre de « quinte flush »

Cocher 5 cartes réalisant une quinte flush royale (i.e. à l'as)

Quinte Flush

	As	Roi	Dam	V	10	9	8	7	6	5	4	3	2
♣													
♦													
♥													
♠													

	Jeu: 32 cartes	Jeu: 52 cartes
Dans la couleur choisie, combien y-a-t-il de quintes flush?		
Pour un jeu de 52, avez-vous compter la quinte 5, 4, 3, 2 et As?		
Donner le nombre de quinte flush dans la couleur choisie?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des quintes flush?		
Donner la probabilité de réaliser une quinte flush?		

3. Nombre de « carré »

Cocher 5 cartes réalisant un carré.

Carré

	As	Roi	Dam	V	10	9	8	7	6	5	4	3	2
♣	☑												
♦	☑												
♥	☑	☑											
♠	☑												

	Jeu: 32 cartes	Jeu: 52 cartes
De combien de façons différentes peut être choisi le carré?		
De combien de façons différentes peut être choisi la 5ième carte?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des carrés?		
Donner la probabilité de réaliser un carré?		

4. Nombre de « full »

Cocher 5 cartes réalisant un full aux as par les rois: un brelan d'as (3 As) **et** une paire de rois.

	As	Roi	Dam	V	10	9	8	7	6	5	4	3	2
♣													
♦													
♥													
♠													

	Jeu: 32 cartes	Jeu: 52 cartes
De combien de façons différentes peuvent être choisis les 3 as?		
De combien de façons différentes peuvent être choisis les 2 rois?		
Dans un full, de combien de façons différentes pourra-t-on choisir la valeur des cartes constituants le brelan et la paire?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des full?		
Donner la probabilité de réaliser un full?		

5. Nombre de « couleur » ou flush

Cocher 5 cartes réalisant une couleur: 5 cartes **non consécutives mais** de la même couleur.

	As	Roi	Dam	V	10	9	8	7	6	5	4	3	2
♣													
♦													
♥													
♠													

	Jeu: 32 cartes	Jeu: 52 cartes
Dans la couleur choisie, combien y-a-t-il de couleur si on considère que les cartes peuvent être consécutives? *(i.e. De combien de façon possible peut-on choisir 5 cartes de la même couleur)*		
Donner alors le nombre de mains qui sont des couleur?		
Pensez à enlever le nombre de quintes flush, qui ne sont pas des « couleur » puisque les cartes sont consécutives?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des couleurs?		
Donner la probabilité de réaliser une couleur?		

6. Nombre de « quinte » ou suite:

Cocher 5 cartes réalisant une suite à l'as: 5 cartes **consécutives mais** au moins une de couleur différente **et** dont la carte la plus forte est un as.

	As	Roi	Dam	V	10	9	8	7	6	5	4	3	2
♣													
♦													
♥													
♠													

	Jeu: 32 cartes	Jeu: 52 cartes
Si on considère que les 5 cartes peuvent être de la même couleur, combien de suites à l'as peuvent être réalisées? *(Est-ce une p-liste, un arrangement ou une combinaison?)*		
Donner alors le nombre de mains qui sont des suites?		
Pour un jeu de 52, avez-vous compter les suites 5, 4, 3, 2 et As?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des suites?		
Pensez à enlever le nombre de quintes flush, qui ne sont pas des « suites » puisque les cartes sont consécutives?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des suites?		
Donner la probabilité de réaliser une suite?		

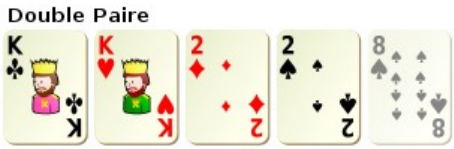
7. Nombre de « brelan »

Cocher 5 cartes réalisant un brelan d'as: 3 as **et** 2 autres cartes de valeurs différentes.

	As	Roi	Dam	V	10	9	8	7	6	5	4	3	2
♣													
♦													
♥													
♠													

	Jeu: 32 cartes	Jeu: 52 cartes
De combien de façons différentes peuvent être choisis les 3 as?		
De combien de façons différentes peuvent être choisis les 2 cartes restantes? *(Attention l'ordre de tirage de ces 2 dernières cartes ne compte pas)*		
Dans un brelan, de combien de façons différentes pourra-t-on choisir la valeur des cartes constituants le brelan?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des brelans?		
Donner la probabilité de réaliser un brelan?		

8. Nombre de « double paire »



Cocher 5 cartes réalisant une double paire: une paire d'as **et** une paire de rois **et** une carte restante de valeur différente des cartes utilisées pour la double paire.

	As	Roi	Dam	V	10	9	8	7	6	5	4	3	2
♣													
♦													
♥													
♠													

	Jeu: 32 cartes	Jeu: 52 cartes
De combien de façons différentes peuvent être choisis les 2 as?		
De combien de façons différentes peuvent être choisis les 2 rois?		
De combien de façons différentes peut être choisi la 5^{ième} carte?		
Dans une double paire, de combien de façons différentes pourra-t-on choisir la valeur des cartes constituants le double paire?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des doubles paires?		
Donner la probabilité de réaliser une double paire?		

9. Nombre de « paire »

Cocher 5 cartes réalisant une paire d'as: une paire d'as **et** 3 cartes restantes de valeurs différentes les uns les autres.

	As	Roi	Dam	V	10	9	8	7	6	5	4	3	2
♣													
♦													
♥													
♠													

	Jeu: 32 cartes	Jeu: 52 cartes
De combien de façons différentes peuvent être choisis les 2 as?		
De combien de façons différentes peuvent être choisis les 3 cartes restantes? *(Attention l'ordre de tirage de ces 3 dernières cartes ne compte pas)*		
Dans une paire, de combien de façons différentes pourra-t-on choisir la valeur des cartes constituants la paire?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des paires?		
Donner la probabilité de réaliser une paire?		

10. Nombre de « carte haute » ou combinaison restante

Cocher 5 cartes réalisant une combinaison restante (aucune des combinaison énoncées jusqu'à présents). Utiliser les résultats des questions précédentes pour compléter le tableau.

	As	Roi	Dam	V	10	9	8	7	6	5	4	3	2
♣													
♦													
♥													
♠													

	Jeu: 32 cartes	Jeu: 52 cartes
Donner alors le nombre total *N* de mains réalisables?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des quintes flush?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des carrés?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des full?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des couleurs?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des suites?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des brelans?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des doubles paires?		
Donner alors le nombre de mains qui sont des paires?		
Donner alors le nombre de mains restantes?		
Donner alors la probabilité restante?		

11. Récapitulatif des nombres de mains et probabilités associées.

Main	Jeu de 32 cartes		Jeu de 52 cartes	
	Combinaisons	Probabilité	Combinaisons	Probabilité
Quinte flush				
Carré				
Full				
Couleur				
Suite				
Brelan				
Double paire				
Paire				
Carte haute (reste)				
Total				

Commentaires:

http://fr.wikipedia.org/wiki/Probabilit%C3%A9_au_poker

EXERCICE n°3: *Le jeu du pile ou face*

Consigne(s): On considère l'expérience aléatoire suivante: on réalise $n = 5$ lancés consécutives d'une pièce de monnaie. A chaque lancé, on note les événements suivants: S (succès): « Le résultat est pile » et E (échec): « le résultat est face ». Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre k de succès sur les n lancés de la pièce (i.e. Le nombre de résultat pile).

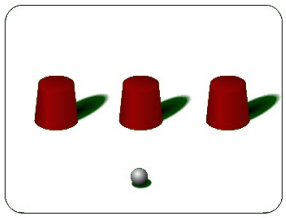
a) Si vous dessinez l'arbre de probabilité associé à cette expérience aléatoire, combien d'éventualités ω contient-il? (i.e. Combien-y-a-t-il de branches sur l'arbre?)
b) Lors du 1er lancé, que vaut P(S) et P(E)?
c) Quelles sont les valeurs possibles prises par la variable aléatoire X à l'issu des n lancés?
d) Quelle est la probabilité de l'événement « $X = 0$ » ou $P(X = 0)$?
e) Quelle est la probabilité de chacune des branches de l'arbre?
f) Combien de chemins satisfont la condition $X = 1$? Que vaut alors $P(X = 1)$?
g) Mêmes questions pour $X = 4$?
h) Mêmes questions pour $X = 2$?
i) Mêmes questions pour $X = 3$?
j) Compléter alors le tableau ci-dessous donnant, les différentes valeurs k de X, la probabilité d'un **seul** chemin respectant la condition $X = k$, le nombre de chemins respectant la condition $X = k$, et afin la probabilité $P(X = k)$
k) Intuitivement, quelle est la valeur moyenne de X?

Valeur k de X	0	1	2	3	4	**5**	
Probabilité d'un **seul** chemin vérifiant $X = k$.							
Nombre de chemin vérifiant $X = k$.							
Probabilité $P(X = k)$							

EXERCICE n°4: *Le jeu du « Bunto »*

Consigne(s): On considère l'expérience aléatoire suivante: On joue $n = 9$ fois consécutivement au « Bunto » en choisissant à chaque fois **au hasard** l'emplacement de la timbale. A chaque nouveau choix, on note les évènements suivants: S (succès) « le choix est un succès » et E (échec) « le choix est un échec ». On note $p = P(S)$ et $q = 1 - p = P(E)$. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre k de succès sur les n choix.

a) Lorsque l'on joue pour la 1ère fois, que vaut p et q? Et pour la i ième fois, que vaut p et q?
b) Combien d'éventualités ω contient l'univers Ω associé à cet expérience aléatoire? (i.e. Combien-y-a-t-il de branches sur l'arbre de probabilités?) Est-il judicieux de le dessiner en entier?
c) Quelles sont les valeurs possibles prises par la variable aléatoire X à l'issu des n fois?
d) Quelle est la probabilité de l'événement « $X = 0$ » ou $P(X = 0)$?
(L'exprimer en fonction de q et n)
e) Quelle est la probabilité de l'événement « $X = n$ » ou $P(X = n)$?
(L'exprimer en fonction de p et n)
f) Quelle est la probabilité d'un **seul** chemin respectant la condition $X = 2$?
(L'exprimer en fonction de p, q et n)
g) Combien de chemins satisfont la condition $X = 2$?
(L'exprimer en fonction de n puis faire le calcul)
h) Donner alors la probabilité $P(X = 2)$
(L'exprimer en fonction de p, q et n)
i) Quelle est la probabilité d'un **seul** chemin respectant la condition $X = k$?
(L'exprimer en fonction de p, q, n et k)
j) Combien de chemins satisfont la condition $X = k$?
(L'exprimer en fonction de n et k)
k) Donner alors l'expression littérale de la probabilité $P(X = k)$.
(L'exprimer en fonction de p, q, n et k)



l) Compléter alors le tableau ci-dessous donnant, pour les différentes valeurs k de X indiquées la probabilité d'un **seul** chemin respectant la condition $X = k$, le nombre de chemins respectant la condition $X = k$, et afin la probabilité $P(X = k)$.

Valeur k de X	0	1	···	k	···	n
Probabilité d'un **seul** chemin vérifiant $X = k$.			...		...	
Nombre de chemin vérifiant $X = k$.			...		...	
Probabilité $P(X = k)$			...		...	

m) Compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs $P(X = k)$ pour les valeurs p, q et n de cet exemple. (Arrondir à 10^{-3})

$X = k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = k)$										

n) Intuitivement, quelle est la valeur moyenne de X?

EXERCICE n°5: *Le chapeau du magicien.*

Consignes: Un chapeau de magicien contient 3 boules blanches et une boule noire. On considère l'expérience aléatoire suivante: on réalise $n = 12$ tirages **avec remise** et on observe la couleur de la boule choisie. A chaque tirage, on note les événements suivants: S (succès) « la boule choisie est blanche » et E (échec) « la boule choisie est noire ». On note $p = P(S)$ et $q = 1 - p = P(E)$. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre k de succès sur les n tirages.

a) Lorsque l'on joue pour la 1ère fois, que vaut p et q? Et pour la i ième fois, que vaut p et q?
b) Combien d'éventualités ω contient l'univers Ω associé à cet expérience aléatoire?
(L'exprimer en fonction de n puis faire le calcul)
c) Quelles sont les valeurs possibles prises par la variable aléatoire X à l'issu des n tirages?
d) Quelle est la probabilité de l'événement « $X = 0$ » ou $P(X = 0)$?
(L'exprimer en fonction de q et n)
e) Quelle est la probabilité de l'événement « $X = n$ » ou $P(X = n)$?
(L'exprimer en fonction de p et n)
f) Quelle est la probabilité d'un **seul** chemin respectant la condition $X = k$?
(L'exprimer en fonction de p, q, n et k)
g) Combien de chemins satisfont la condition $X = k$?
(L'exprimer en fonction de n et k)
h) Donner alors l'expression littérale de la probabilité $P(X = k)$.
(L'exprimer en fonction de p, q, n et k)
i) Compléter alors le tableau ci-dessous donnant, pour les différentes valeurs k de X indiquées la probabilité d'un **seul** chemin respectant la condition $X = k$, le nombre de chemins respectant la condition $X = k$, et afin la probabilité $P(X = k)$.

Valeur k de X	0	1	...	k	...	n
Probabilité d'un **seul** chemin vérifiant $X = k$.			...		...	
Nombre de chemin vérifiant $X = k$.			...		...	
Probabilité $P(X = k)$			...		...	

j) Compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs $P(X = k)$ pour les valeurs p, q et n de cet exemple. (Arrondir à 10^{-3})

$X = k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$													

k) Intuitivement, quelle est la valeur moyenne de X?
l) Calculer les grandeurs suivantes $E(X) = n \times p$ et $\sigma(X) = \sqrt{(n \times p \times q)}$
m)Quelle est la probabilité d'avoir **au moins** 9 succès sur les n tirages?
n) Quelle est la probabilité d'avoir **au plus** 6 succès sur les n tirages?
o) Quelle est la probabilité d'avoir **exactement** 4 échecs sur les n tirages?