Domaines d'utilité:

- Lois de Probabilités pour une variable aléatoire (création d'une loi)
- Calcul de dénombrement et de probabilités associées

Objectifs:

- Notation factorielle: utilisation
- Combinaisons: calcul de combinaisons, application au triangle de Pascal
- Développement de $(a + b)^n$

Dénombrement

Pré-requis:

- Probabilités: Création d'arbre ou d'ensemble, notion de tirage

I - P-Liste

1. Activités

On pourra considérer un tirage **avec** remise pour lequel **l'ordre de tirage compte.**

a) Combien de nombres différents à 1 chiffre peut-on écrire avec les 4 chiffres suivants: {1;2;3;4}?

b) Combien de nombres différents à 2 chiffres peut-on écrire avec les 3 chiffres suivants: {1;2;3}?

c) De combien de façons possibles peuvent être écrites une suite de trois lettres, les trois lettres étant prises à chaque fois parmi les 26 lettres de l'alphabet?

d) Sur trois courses **consécutifs** avec les huit même coureurs, On ne s'intéresse qu'aux vainqueurs de chaque courses. Combien y a t-il de triplets vainqueurs différents?

2. Définition et formule d'une P-liste

Une P-liste est une liste de p éléments où chacun des p éléments peut être choisi parmi une liste de n éléments. Ces p éléments **peuvent être identiques ou pas**. Le nombre de p-liste choisi parmi n éléments est n^p . On peut parler également de tirage successif **avec** remise pour lequel **l'ordre de tirage compte**.

3. Exercices d'application

a) Combien y a-t-il de mots de passe formés de cinq lettres, lettres choisies dans l'alphabet de 26 lettres?

II - Notation factorielle

1. Définition

La notation factorielle est utilisée **uniquement** pour les nombres entiers.
Notation : $n!$.
Lecture: « factorielle n »
Valeur associée: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n - i) \times (n - 2) \times (n - 1) \times n = \prod i$
(c'est aussi le produit des entiers de 1 jusqu'à n)
Cas particulier: $0! = 1$
Touche de la calculatrice: CASIO: OPTN / PROB / $x!$ - TI: ....

2. Exercices d'application

a) Donner les factorielles des premiers entiers. Quelle(s) remarque(s) peut-on faire?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$											

Remarque(s) générale(s):

b) Simplifier A = 23! / 21! .

c) Simplifier $B_n = (n + 1)! / (n - 1)!$

d) Simplifier $C = \dfrac{25!}{(20! \times 5!)}$

III - Arrangement

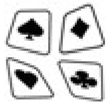
1. Activités

On pourra considérer un tirage **sans** remise pour lequel **l'ordre de tirage compte.**

a) Sur 1 seule course de huit coureurs, combien de podium différents peut-il y avoir?

b) Sur 10 apprentis arrivant en classe, de combien de façon différentes peuvent arriver les 4 premiers?

c) De combien de façon différentes puis-je sortir 5 cartes d'un jeu de 32 cartes en tenant compte de l'ordre de sortie?



2. Définition d'un arrangement

Un **arrangement** de p éléments choisi parmi n éléments est **une p-liste** dans laquelle **les deux éléments sont deux à deux distincts**. Il **ne peut pas y avoir répétition** d'un même élément au sein de cette p-liste. Le nombre d'arrangement de p éléments choisis parmi n éléments vérifient la relation suivante:

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

On peut parler également de tirage successif **sans** remise pour lequel **l'ordre de tirage compte**.

Touche calculatrice: CASIO: OPTN / PROB / nPr – TI: ....

3. Exercices d'application

a) On considère un code à 4 chiffres **distincts** choisis parmi les chiffres 0 à 9. Donner le nombre total de codes possibles.

b) Donner le nombre total de tiercé dans l'ordre possible sur une course de 10 chevaux au départ.

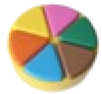
c) Un internaute utilise un mot de passe de 8 caractères dont les 5 premiers sont des lettres et les 3 derniers des chiffres compris en 0 et 9. En considérant les 5 lettres distinctes et les 3 chiffres distinctes, donner le nombre total de mots de passe possible.

IV - Permutation

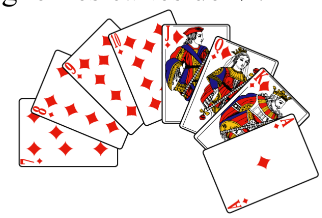
1. Activités

a) Combien de podium différents forment-on avec 3 athlètes différents?

b) Sur un camembert de trivial-pursuit, de combien de façons différentes peut-on placer les 6 portions de camembert de différentes couleurs?



c) Dans un jeu de 32 cartes, de combien de manières différentes peut-on aligner les cartes de ♦?



2. Définition d'une permutation

Une **permutation** est un **arrangement** de p éléments choisi parmi $n = p$ éléments.
Le nombre de permutation de p éléments est donc: $A_p^p = P_p = p!$

3. Exercices d'application

a) Le mot LOGARITHME est constitué de 4 voyelles et 6 consonnes. De combien de façons différentes peut-on réarranger ces 10 lettres (*Exemple:* GRAMOHELIT est une autre façon.)

b) On considère 12 personnes autour d'une table. Donner le nombre de disposition différentes de ces douze personnes autour de la table. En considérant 3 repas par jour, donner le temps nécessaire pour que toutes les dispositions aient été réalisées une et une seule fois.

V - Combinaisons

1. Définition et notation du nombre de combinaisons

Une **combinaison** de p éléments parmi n est une façon de choisir p éléments parmi n éléments pour lequel **l'ordre de tirage n'a aucune importance**. Si on prenait en compte l'ordre de tirage, le nombre de combinaisons serait le nombre d'arrangement A_n^p. Mais les p éléments peuvent être arrangés de p! manières différentes (le nombre de permutations). Le nombre de **combinaisons** de p éléments parmi n est:

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$$

On peut parler également de tirage successif **sans** remise. **L'ordre de tirage ne compte pas**.

Touche calculatrice: CASIO: OPTN / PROB / nCr – TI: ....

2. Activités

a) Au poker, combien de combinaisons de 5 cartes peut-on extraire d'un jeu de 32 cartes?

b) Sur un sprint olympique de 8 coureurs, de combien de manières différentes peut-on choisir les trois médaillés? (i.e combien il y a de façons différentes de choisir 3 personnes parmi 8?)

c) Au loto, combien y-a-t-il de combinaisons de 6 numéros parmi les 49 boules?

d) En classe, de combien de manière différentes je peux choisir deux apprentis parmi 10 apprentis?

3. Exercices d'application

a) Donner le nombre total de tiercé dans le désordre possibles sur une course de 10 chevaux?

b) Donner le nombre total de mains de 5 cartes choisies dans un jeu de 52 cartes?

c) 15 candidats se présentent à un concours comportant 8 places. La liste des reçus est publiée par ordre alphabétique. Combien y a t il de listes possibles?

VI - Propriétés des combinaisons

1. Triangle de Pascal ou tableau des combinaisons: $C_n^p = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p! \times (n-p)!}$

Consigne(s): En utilisant les fonctionnalités de votre calculatrice (CASIO: optn / prob / nCr), compléter le tableau ci-dessous. Pour la **dernière** colonne, vous donnerez la somme S_n suivante:

$$S_n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \qquad \text{(somme des valeurs obtenues sur une même ligne).}$$

On **exprimera** cette somme sous la forme du puissance de 2, par exemple $8 = 2^3$.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	S_n
0												
1												
2												
3								C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^{p}			
4									C_n^p			
5												
6												
7												
8												
9												
10												

Diagonale(s) $p = n - 1$ et $p = n$

2. Propriétés associées aux combinaisons.

Consigne(s): A partir du triangle de Pascal ci-dessus, déduire les propriétés quelque soit n et p:

Indication	Formule	Résultat
Colonne pour $p = 0$	$C_n^0 =$	
Colonne pour $p = 1$	$C_n^1 =$	
Valeur pour $p=1$ et $n-1$	$C_n^1 =$	
Somme C_n^p (Ex: $n = 8$)	$\sum C_n^p =$	

Indication	Formule	Résultat
Diagonale pour $p = n$	$C_n^n =$	
Colonne pour $p = n - 1$	$C_n^{n-1} =$	
Valeur pour p et $n - p$ (Exemple: $n = 10$)	$C_n^p =$	
Formule du triangle	$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$	

3. Développement de $(1-t)^n$ pour les premières valeurs de n.

Consigne(s): Développer $(1-t)^n$ en **ordonnant** les termes par **puissances croissantes** de t. Quelle(s) remarque(s) peut-on faire sur les coefficients devant les termes t^n ?

$n = 2$	$(1-t)^2 = (1-t) \times (1-t)$	
$n = 3$	$(1-t)^3 = (1-t)^2 \times (1-t)$	
$n = 4$	$(1-t)^4 = (1-t)^3 \times (1-t)$	
$n = 5$	$(1-t)^5 = (1-t)^4 \times (1-t)$	
Remarque(s) sur les coefficients de t^n ?		

4. Formule du binôme, coefficients dans le développement de $(a + b)^n$

Le triangle de Pascal permet rapidement de trouver les coefficients du développement de $(a + b)^n$. Prenons l'exemple avec $(a + b)^5$ qui contient 5 termes en facteurs:
$(a + b)^5 = (a + b) \times (a + b) \times (a + b) \times (a + b) \times (a + b) \times (a + b)$

En développant cette formule, on tombera par exemple sur un terme du type $a^3 \times b^2$. De combien de manière possible peut-t-on tomber sur ce terme en développant $(a + b)^5$. Cette question revient au nombre de façons de choisir 3 termes contenant a parmi les 5 termes en facteurs, ou bien au nombre de façons de choisir 2 termes contenant b parmi les 5 termes en facteurs. Le résultat est:
$C_5^3 = C_5^2 = 10$.

5. Activités

Consigne(s): A partir du triangle de Pascal, donner la forme développée des expressions ci-dessous:

Expression	Forme développée
$(a + b)^2 =$	
$(a - b)^2 =$	
$(a + b)^3 =$	
$(a - b)^3 =$	
$(1 + 2x)^3 =$	
$(3t + 1)^3 =$	
$(x + y)^5 =$	
$(1 + 1)^4 =$	

La **formule du binôme** et **son cas particulier** pour $(1 + 1)^n$ s'écrivent:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \times a^p \times b^{n-p} = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \times a^{n-p} \times b^p \quad et \quad 2^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p$$

VII - Tableau récapitulatif

1. Récapitulatif

Consigne(s): En utilisant les résultats précédents donnant les propriétés et définitions des différentes notions que sont la P-liste, l'arrangement, la permutation ou bien la combinaison, compléter le tableau ci-dessous qui donnent les informations suivantes:

Le tirage associé est-il AVEC ou SANS remise?

L'ordre du tirage est-il important ou pas?

Quel est le nombre de choix différents possibles.

Notions	***Tirage avec ou sans remise***	***L'ordre du tirage est-il important?***	***Nombre de choix possibles***
P-liste : liste de p éléments parmi n éléments			
A_n^p : Arrangements de p éléments parmi n éléments			
P_p : Permutations de p éléments			
C_n^p : Combinaisons de p éléments choisis parmi n éléments.			

2. Application directe

a) Les échecs

a) De combien de façon différentes peut-on placer le roi, la reine, le fou, le cavalier et la tour sur les 5 premières cases de la première ligne d'un échiquier?

b) De combien de façon différentes peut-on placer le roi, la reine, le fou, le cavalier et la tour sur la première ligne de l'échiquier?

c) De combien de façon différentes peut-on placer 4 pions blancs sur la seconde ligne d'un échiquier?

d) De combien de façon différentes peut-on placer 6 pions noirs sur la 7ième ligne d'un échiquier?

e) De combien de façons différentes peut-on placer les deux fous noirs sur la 8ième ligne de l'échiquier?