Sujet d'examen

Thème:

2014_Gr_C: *(Sujet groupement C – Session 2014)*

Table des matières

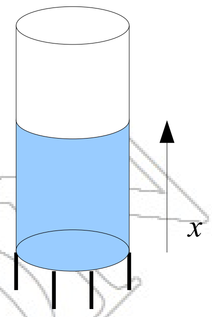
EXERCICE n°1: (9 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans le cadre d'une sécurisation des silos à grains, on étudie les contraintes exercées dans un silo cylindrique, de diamètre connu, contenant un matériau granulaire de masse volumique connue.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On s'intéresse à la fonction donnant la pression (en kilo pascals) exercée sur le fond du silo en fonction de la hauteur x (en mètres) de grains contenus dans le silo.



On admet que cette fonction vérifie l'équation différentielle (E) :

$$(E) : y' + 0{,}175\, y = 8{,}365.$$

Dans cette équation, y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + 0{,}175\, y = 0$.

2. Déterminer le réel a tel que la fonction g, définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $g(x) = a$, soit une solution particulière de l'équation (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la fonction p, définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$, solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition $p(0) = 0$.

CORRECTION

1. C'est une équation différentielle du premier ordre (E_0) : $y' + 0{,}175\, y = 0$.
Son équation caractéristique d'inconnue $r(x)$ est (E_c) : $r(x) + 0{,}175 = 0$.
Sa solution est $r(x) = -0{,}175$. Une primitive $R(x)$ de la fonction $r(x)$ est $R(x) = -0{,}175\, x$.
Les solutions sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ de l'équation différentielle de (E_0) sont alors :

$$\boxed{y_0(x) = k\, e^{R(x)} \;\Leftrightarrow\; y_0(x) = k\, e^{-0{,}175x}}$$

<u>*Remarque(s) :*</u> L'application directe du cours et/ou du formulaire conduit au même résultat :
$a(x) = 1$, $b(x) = 0{,}175$, $g(x) = b/a = 0{,}175$, $G(x) = 0{,}175\, x$ et finalement :

$$y_0(x) = k \times e^{-G(x)} \Leftrightarrow y_0(x) = k \times e^{-0{,}175\,x}\,.$$

2. Si la solution particulière est une constante, alors elle est du type $y_p(x) = a$.
La méthode à utiliser est la méthode par <u>identification du coefficient a.</u> Comme $y'_p(x) = 0$, on a :

$$\begin{aligned}(E) : y' + 0{,}175\, y = 8{,}365 \quad &\Leftrightarrow \quad y'_p + 0{,}175\, y_p = 8{,}365\\ &\Leftrightarrow \quad 0{,}175\, a = 8{,}365\\ &\Leftrightarrow \quad a = 47{,}8 \Leftrightarrow \boxed{y_p(x) = 47{,}8}\end{aligned}$$

3. Les solutions de (E) s'écrivent : $y_g = y_0 + y_p$. Soit :

$$\boxed{y_g(x) = y_0(x) + y_p(x) \;\Leftrightarrow\; y_g(x) = k\, e^{-0{,}175x} + 47{,}8}$$

4. Ici, la condition initiale est $p(0) = 0$. Soit :

$$\boxed{y_g(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; k\, e^{0} + 47{,}8 = 0 \;\Leftrightarrow\; k = -47{,}8 \;\Leftrightarrow\; p(x) = -47{,}8\, e^{-0{,}175x} + 47{,}8}$$

<u>*Remarque(s) :*</u> On retrouve bien la fonction f de la *Partie B* de cet exercice.

Partie B. Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty [$ par $f(x) = 47{,}8 \times (1 - e^{-0{,}175\,x})$.

Cette fonction f est celle qui, à toute hauteur x de grains contenus dans le silo décrit dans la *partie A*, associe la pression exercée sur le fond de celui-ci.

On admet, pour l'étude théorique, que l'on peut remplir indéfiniment le silo.

1. Étude théorique

a) Prévoir le sens de variation de f.

b) Justifier par le calcul le sens de variation de f.

c) Démontrer que la courbe représentative $\boldsymbol{C}$ de la fonction f admet une asymptote horizontale $\mathcal{D}$ d'équation $y = 47{,}8$.

A partir d'une certaine hauteur de grains λ, on observe un effet de voûte à l'intérieur du silo, ce qui limite la pression exercée sur le fond et provoque une augmentation de la pression sur les parois latérales. Ce phénomène explique le risque d'éclatement d'un silo trop rempli. L'étude physique montre que λ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente T à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0 et de son asymptote horizontale $\mathcal{D}$.

2. La courbe représentative $\boldsymbol{C}$ de la fonction f, dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, est fournie en annexe. Cette annexe est à rendre avec la copie.

a) Déterminer graphiquement, sur l'annexe, un encadrement de λ par deux entiers consécutifs.

b) Déterminer une équation de la tangente T à $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0.

c) En déduire, par le calcul, une valeur approchée de λ à 10^{-2}.

CORRECTION

1. Étude théorique

a) On rappelle que la fonction *f* est celle qui, à toute hauteur *x* de grains contenus dans le silo décrit dans la *partie A*, associe la pression exercée sur le fond de celui-ci. Il est donc raisonnable de penser que :

Plus la hauteur *x* augmente, plus la pression *p* augmente. La fonction *f* sera croissante.

b) Pour le justifier, étudions le signe de la fonction dérivée f' de la fonction *f*.

$f(x)=-47{,}8\,e^{-0{,}175\,x}+47{,}8,\ f'(x)=-47{,}8\times(-0{,}175)\times e^{-0{,}175\,x}\Leftrightarrow f'(x)=8{,}365\times e^{-0{,}175\,x}$
$f'(x)>0$ donc *f* est croissante.

c) Soit $y(x)$ l'équation de l'asymptote $\mathcal{D}$. Pour démontrer que la courbe ***C*** admet une asymptote horizontale, il faut déterminer l'expression de $\delta(x) = f(x) - y(x)$ puis calculer la limite de la fonction δ pour *x* qui tend vers plus l'infini ($x \to +\infty$).

$f(x)=-47{,}8\,e^{-0{,}175\,x}+47{,}8,\ y(x)=47{,}8$ donc $\delta(x)=-47{,}8\,e^{-0{,}175\,x}$

En utilisant la notation pratique pour les limites, nous avons :

Pour $x\to+\infty,\ -0{,}175\,x\to-\infty,\ e^{-0{,}175\,x}\to0^{+}$ et $-47{,}8\,e^{-0{,}175\,x}\to0^{-}$ soit finalement
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y(x))=0^{-}$$

<u>*Remarque(s) :*</u> Cette limite égale à zéro permet de justifier que la droite horizontale $\mathcal{D}$ d'équation $y(x) = 47{,}8$ est une asymptote à la courbe ***C*** pour la région de *x* qui tend vers plus l'infini. Cette limite (de signe négatif) permet de justifier que, dans la région de *x* qui tend vers plus l'infini, la courbe ***C*** d'équation $f(x)$ est située au dessous de la droite D d'équation $y(x)$ (Voir l'annexe pour la position de la courbe ***C*** par rapport à la droite asymptote $\mathcal{D}$.)

2. Détermination de λ .

a) Voir l'annexe . Il suffit de tracer la tangente *T* à la courbe ***C*** à l'origine du repère (en traits pointillés vert), de tracer la droite asymptote $\mathcal{D}$ dont l'équation et $y = 47{,}8$ (en trait plein vert), de placer le point *I*, intersection de la courbe ***C*** et de la droite $\mathcal{D}$, puis de lire l'abscisse du point *I*. On obtient :

$$\boxed{5\leqslant x_I\leqslant6\ \Leftrightarrow\ 5\leqslant\lambda\leqslant6}$$

b) Pour déterminer l'équation de la tangente $T : y = a\,x + b$ à l'origine du repère O de la courbe, il faut les trois informations du point O, son abscisse $x_O = 0$, son nombre dérivée défini par $a_O = f'(x) = f'(0) = 8{,}365$ et son ordonnée $y_O = f(0) = 0$. Ainsi :

$T : y=a\,x+b$ avec $a=8{,}365$. Au point O, nous avons : $0=8{,}365\times0+b$ soit $b=0$
L'équation de la tangente est donc : $T : y=8{,}365\,x$

c) *I* est le point d'intersection de *C* et de $\mathcal{D}$. Les coordonnées de *I* vérifient le système d'équations (On rappelle que $\lambda = x_I$) :

$$\begin{pmatrix}I\in T\\ I\in D\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y_I=8{,}365\,x_I\\ y_I=47{,}8\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_I=\dfrac{y_I}{8{,}365}\\ y_I=47{,}8\end{pmatrix}\text{ soit finalement }\lambda=x_I=\frac{47{,}8}{8{,}365}\approx5{,}71$$

Partie C. Calcul intégral

Calculer la pression moyenne exercée sur le fond du silo par une quantité de grains d'une hauteur variant entre 0 et 5 mètres.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction *f* entre les valeur *a* et *b* est : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

CORRECTION

Graphiquement, entre $x = 0$ et 5, la pression varie de $p = 0$ à $p \approx 27{,}5$. On peut estimer la pression moyenne (moyenne de la fonction f) à $m \approx 13{,}75$. Calculons dans un premier temps l'intégrale $I=\int_a^b f(x)\,dx$ puis calculons ensuite la valeur moyenne $m=\frac{I}{b-a}$.

1. <u>*Méthode n°1 :*</u> Calcul à la main

$I=\int_a^b f(x)\,dx=F(B)-F(a)$ avec F une primitive de la fonction f .

$$f(x)=47{,}8(1-e^{-0{,}175x}) \text{ donc}$$

$$F(x)=47{,}8\left(x-\frac{1}{(-0{,}175)}e^{-0{,}175x}\right) \Leftrightarrow F(x)=47{,}8\left(x+\frac{1}{0{,}175}e^{-0{,}175x}\right)$$

$$F(5)=47{,}8\left(5+\frac{1}{(0{,}175)}e^{-0{,}875}\right) \Leftrightarrow F(5)\approx 352{,}863$$

$$F(0)=47{,}8\left(0+\frac{1}{(0{,}175)}e^{0}\right) \Leftrightarrow F(5)=\frac{47{,}8}{0{,}175}\approx 273{,}143 \text{ soit finalement}$$

$$I\approx 79{,}72 \text{ puis } m=\frac{I}{5}\approx 15{,}94$$

<u>*Remarque(s) :*</u> Ce résultat est cohérent, comparé à notre estimation graphique de $m \approx 13{,}75$.

2. <u>*Méthode n°2 :*</u> Calcul directement à la calculatrice.

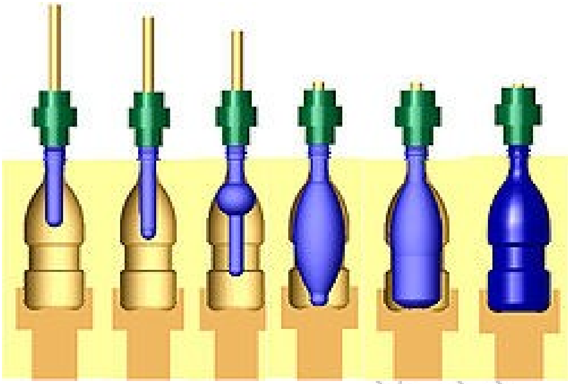
<u>*Données :*</u> variable *x*, fonction *f* (*x*), bornes d'intégration $a = 0$ et $b = 5$. <u>*Inconnue :*</u> *I* puis *m*	
CASIO GRAPH 35+	**TI 82 STAT**
MENU RUN Touche OPTN Touche F4 (CALC) Touche F4 (∫dx pour calcul d'intégral)	Touche MATH Choix de la fonction : 9: fnInt(+ touche EXE 9:fnInt(
Entrée des données *f* (*x*), *a*, *b* + EXE **NE PAS <u>*INDIQUER*</u>** la variable *x* ∫(47.8×(1-e^(-0.175X)),0,5)→I 79.72002595 I÷5→M 15.94400519 Solve d/dx d²/dx² ∫dx ▷	Entrée des données *f* (*x*), *x*, *a*, *b* + EXE **NE PAS <u>*OUBLIER*</u>** la variable *x* fnInt(47.8*(1-e^(-0.175X)),X,0,5)→I 79.72002595 I/5→M 15.94400519
<u>*Résultat :*</u> $I \approx 79{,}72$ et $m \approx 15{,}94$	

EXERCICE n°2: (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

La fabrication des bouteilles en PET (polyéthylène téréphtalate) destinées au conditionnement des eaux minérales plates comporte trois étapes principales :

- Étape 1 : l'injection. Les granules de PET sont ramollis sous l'effet de la chaleur. Le plastique est alors injecté dans un moule : on obtient ainsi une **préforme** qui ressemble à un tube à essais.
- Étape 2 : les préformes sont chauffées dans un four infrarouge.
- Étape 3 : le soufflage. Une tige étire la préforme et un jet d'air la comprime contre les parois (voir figure).



Processus d'étirage-soufflage d'une préforme. (Extrait de Wikipédia)

Une société est spécialisée dans la fabrication de bouteilles d'eau plate.

On effectue différents types de test de contrôle de qualité afin de vérifier que les bouteilles sont conformes aux normes en vigueur.

Partie A. Loi binomiale

Un premier type de test est effectué sur les préformes à l'issue de l'étape 1 de fabrication décrite ci-dessus. On estime qu'il y a 0,5% de préformes non conformes aux normes établies.

Soit X la variable aléatoire qui, à tout lot de 80 préformes prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de préformes non conformes. La production de la société est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait une seule préforme non conforme dans un lot de 80.

3. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus une préforme non conforme dans un lot de 80.

CORRECTION

1. X est une variable aléatoire qui représente le nombre k de *préformes non conformes* dans un lot de <u>$n = 80$</u> *préformes* (k prend les valeurs entières entre 0 et 5.).

A chaque tirage ou épreuve, il y a deux issues possible :

- une issue appelée succès, ici, « *la préforme est non conforme* » de probabilité <u>$p = 0{,}005$</u>.
- une issue appelée échec, ici, « *la préforme <u>est</u> conforme* » de probabilité $q = 0{,}995$

Comme ce prélèvement des $n = 80$ *préformes* s'effectue sous l'hypothèse d'un tirage avec remise, chaque tirage ou épreuve, appelée épreuve de Bernouilli, se répète de manière <u>identique</u> un certains nombre de fois, ici, $n = 80$ fois.
De plus chacun des résultats des tirages sont <u>indépendants</u> les uns des autres.

Ceci est la définition mathématique d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}005$, donc :

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\,(\,n = 80,\, p = 0{,}005\,)}$$

2. <u>*Plusieurs méthodes possibles:*</u> Avec le formulaire, nous utiliserons la formule pour la loi binomiale. Avec les calculatrices (CASIO ou TI), nous utiliserons leurs fonctionnalités.

<u>*Donnée(s) :*</u> Loi binomiale de paramètres **n = 80 et p = 0,005** et calcul <u>ponctuel</u> pour $X = 1$. <u>*Inconnue :*</u> $P\,(\,X = 1\,)$.		
Formulaire	**CASIO GRAPH 35+**	**TI 82 STAT**
$P(X=k)=C_n^k \times p^k \times q^{(n-k)}$ avec[1]: $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\times(n-k)!}$	MENU STAT + touche EXE Touche F5 (DIST) : Distribution Touche F1 (BINM) : Loi binomiale Touche F2 (Bpd) : Calcul <u>ponctuel</u>	Touche 2nd VARS DISTR DRAW 9↑Fcdf(0:binompdf(A:binomcdf(Choix de la fonction : binompdf(+ touche EXE
80→N 80 0.005→P 5E-03 1→K 1 NCK×P^K×(1-P)^(N-K) x! nPr nCr Ran#	Entrée des données + touche EXE Binomial P.D Data :Variable x :1 Numtrial:80 p :5E-03 Save Res:None Execute CALC	Entrée des données + touche EXE <u>*Attention :*</u> l'ordre des données est : binompdf(n , p , k) binompdf(80,0.005,1) .269205154
NCK×P^K×(1-P)^(N-K) 0.269205154	Binomial P.D p=0.26920515	
<u>*Résultat :*</u> $P\,(\,X = 1\,) \approx 0{,}269$		

3. On cherche $P\,(\,0 \leqslant X \leqslant 1\,) = P\,(\,X = 0\,) + P\,(\,X = 1\,)$. On peut donc calculer la probabilité ponctuelle $P\,(\,X = 0\,)$ de la même manière qu'a été calculée la probabilité $P\,(\,X = 1\,)$. On trouve :

$$\boxed{P(X=0)=(1-p)^n \approx 0{,}670 \text{ et finalement } P(0 \leqslant X \leqslant 1) \approx 0{,}939}$$

1 Pour accéder au combinaisons : pour les CASIO : MENU / RUN / OPTN / PROB / nCr et pour les TI : MATH / PRB / nCr

Partie B. Ajustement affine

Le four infrarouge se dérègle au cours du temps. Le réglage ne pouvant être corrigé dans l'immédiat, la société désire évaluer les conséquences de ce dysfonctionnement. Elle décide de relever chaque jour, sur un échantillon, le pourcentage de bouteilles touchées par ce problème. On obtient le tableau suivant :

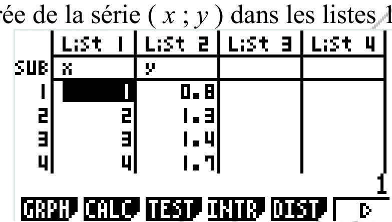
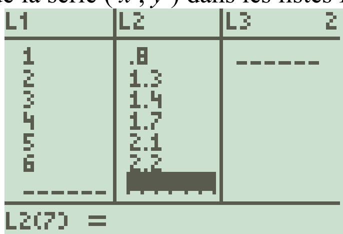
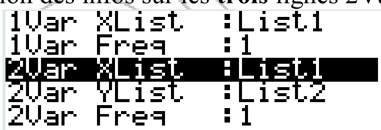
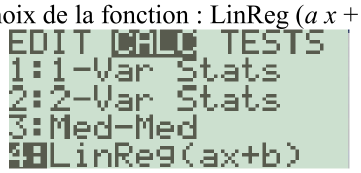
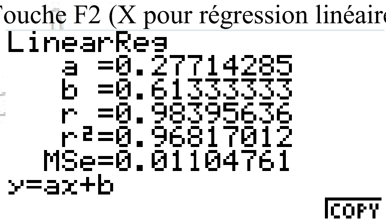
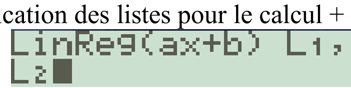
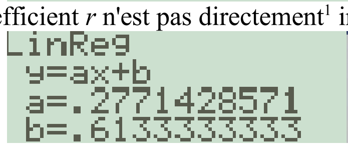
Jour x_i	1	2	3	4	5	6
Pourcentages de bouteilles défectueuses y_i	0,8	1,3	1,4	1,7	2,1	2,2

1. Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-3}).

2. On admet que l'évolution du pourcentage de bouteilles défectueuses se poursuit de la même manière dans les jours suivants. Estimer le pourcentage de bouteilles défectueuses produites le neuvième jour.

CORRECTION

1. En utilisant les fonctionnalités des calculatrices (CASIO ou TI), nous obtenons :

<table>
<tr><th>CASIO GRAPH 35+</th><th>TI 82 STAT</th></tr>
<tr><td>MENU STAT + touche EXE</td><td>Touche STAT, sous-menu EDIT
Choix de la fonction : 1: EDIT
</td></tr>
<tr><td>Entrée de la série (x ; y) dans les listes 1 et 2.
</td><td>Entrée de la série (x ; y) dans les listes L1 et L2.
</td></tr>
<tr><td>Touche F2 (CALC)
Touche F6 (SET)
Vérification des infos sur les trois lignes 2Var + EXE
</td><td>Touche STAT, sous-menu CALC
Choix de la fonction : LinReg ($a\,x + b$)
</td></tr>
<tr><td>Touche F3 (REG)
Touche F2 (X pour régression linéaire)
</td><td>Indication des listes pour le calcul + EXE

Le coefficient r n'est pas directement[1] indiqué.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = a\,x + b$ avec $a \approx 0{,}277$, $b \approx 0{,}613$ et $r \approx 0{,}983$</td></tr>
</table>

2. On cherche y pour $x = 9$. On obtient : $\boxed{y = a\,x + b \ \Leftrightarrow\ y \approx 3{,}106 \text{ soit } 3{,}1}$

1 Pour obtenir r avec la TI82 STAT, faire : Touche VARS, Sous-menu VARS, choix 5: Statistiques, EXE, sous-menu EQ et enfin choix 7 : r

Partie C. Loi normale et test d'hypothèse

Une série de tests, concernant entre-autres la résistance des bouteilles et l'épaisseur de matériau à utiliser, est effectuée à l'issue de l'étape de soufflage sur des échantillons de 100 bouteilles prélevées au hasard.

Chaque bouteille prélevée est placée sous un plateau de compression. Une force verticale est appliquée avec une vitesse constante provoquant la déformation de la bouteille.

Un dynamomètre permet de mesurer la charge de compression verticale, c'est à dire l'intensité maximale de la force exercée pendant le test jusqu'à ce que la bouteille de déforme visiblement. Elle est exprimée en Newtons.

On désigne par C la variable aléatoire qui, à toute bouteille prélevée dans la production, associe la charge de compression verticale infligée lors du test.

On admet que C suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma = 1$.

1. Dans cette question, on admet que $m = 30$. Une bouteille est déclarée conforme lorsque la charge de compression vertical infligée lors du test est comprise entre 28 et 32 Newtons.

Calculer la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production soit conforme.

2. Pour des raisons écologiques, la société vient de mettre au point un nouveau modèle de bouteille en plastique de plus faible épaisseur. On souhaite tester si les bouteilles sont toujours aussi résistantes.

On construit donc un test bilatéral de validité d'hypothèse, destiné à savoir si l'on peut considérer, au seuil de 5%, que la charge moyenne de compression verticale sur l'ensemble de la production de bouteilles est égale à 30 Newtons.

Soit $\overline{C}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 bouteilles de la production, associe la charge moyenne de compression verticale infligée lors du test.

On admet que $\overline{C}$ suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma = 0,1$.

On choisit l'hypothèse nulle H_0 : « $m = 30$ ».

a) Donner l'hypothèse alternative H_1.

b) Sous l'hypothèse H_0 : « $m = 30$ », calculer le réel a tel que :

$$P\,(\,30 - a \leqslant \overline{C} \leqslant 30 + a\,) = 0,95.$$

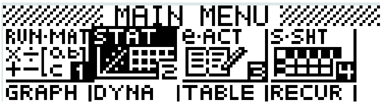
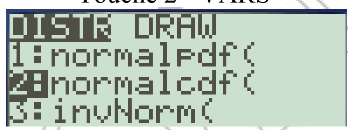
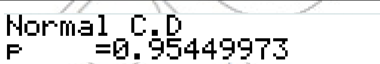
c) Énoncer la règle de décision de ce test.

d) On prélève au hasard un échantillon de 100 bouteilles dans la production. La charge moyenne de compression verticale sur cet échantillon est de 29,4 Newtons.
Peut-on conclure, au seuil de 5%, que la charge moyenne de compression verticale sur l'ensemble de la production de bouteille est égale à 30 Newtons ?

CORRECTION

1. *Plusieurs méthodes possibles:* Avec le formulaire, nous utiliserons les propriétés de transformations entre les lois $\mathcal{N}(\ m\ ;\ \sigma\ )$ et la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(\ 0\ ;\ 1\ )$ (voir figure ci-contre). Avec les calculatrices (CASIO ou TI), nous utiliserons leurs fonctionnalités.

Nous obtenons :

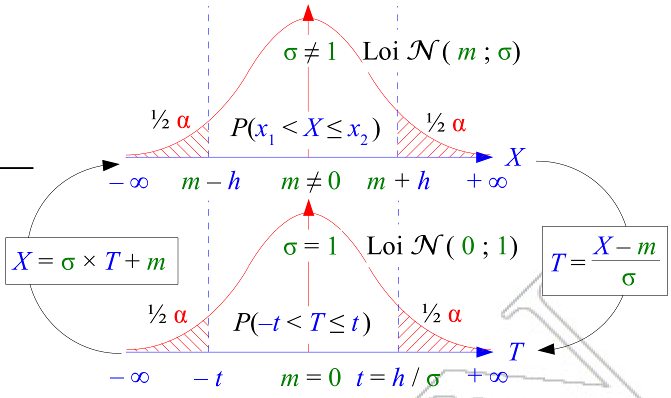
Donnée(s) : Loi normale, moyenne $\boldsymbol{m = 30}$, écart-type $\boldsymbol{\sigma = 1}$, bornes $x_1 = 28$ et $x_2 = 32$. *Inconnue :* $p = P\ (\ x_1 \leqslant X \leqslant x_2\ )$.		
Formulaire	**CASIO GRAPH 35+**	**TI 82 STAT**
Utilisons les propriétés de calcul entre les lois normales $p = P\ (\ x_1 \leqslant X \leqslant x_2\ )$ $p = P\ (\ t_1 \leqslant T \leqslant t_2\ )$ $p = \Pi(\ t_2\ ) - \Pi(\ t_1\ )$	MENU STAT + touche EXE 	Touche 2[nd] VARS 
Calculons t_1 et t_2 à partir de x_1 et x_2, puis calculons $\Pi(\ t_2\ )$ et $\Pi(\ t_1\ )$ à l'aide du formulaire.	Touche F5 (DIST) : Distribution Touche F1 (NORM) : Loi normale Touche F2 (Ncd) : Calcul cumulé	Choix de la fonction : normalcdf(+ touche EXE
$t_2 = (\ x_2 - m\ ) / \sigma$ $t_2 = +\ 2 / 1 \approx +\ 2{,}3$ $\Pi(\ t_2\ ) \approx \Pi(\ 2\ ) = 0{,}9772$ $t_1 = (\ x_1 - m\ ) / \sigma$ $t_1 = -\ 2 / 1 \approx -\ 2$ $\Pi(\ t_1\ ) \approx \Pi(\ -\ 2\ )$ $\Pi(\ -\ 2\ ) = 1 - \Pi(\ 2\ )$ $\Pi(\ -\ 2\ ) = 0{,}0228$	Entrée des données + touche EXE 	Entrée des données + touche EXE *Attention :* l'ordre des données est : normalcdf(x_1 , x_2 , m , σ) 
$p = \Pi(\ t_2\ ) - \Pi(\ t_1\ )$ $p = 0{,}9772 - 0{,}0228$		
Résultat : $p = P\ (\ x_1 \leqslant X \leqslant x_2\ ) \approx 0{,}9544$		

2. On admet que $\overline{C}$ suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\boldsymbol{\sigma = 0{,}1}$.

On choisit l'hypothèse nulle H_0 : « $m = 30$ ».

a) L'hypothèse alternative H_1 est « $m \neq 30$ ».

b) Cette fois ci, nous cherchons la valeur de c_1 et/ou c_2 connaissant la valeur de la probabilité p. Par <u>raisonnement graphique</u>, nous avons :



$$p = P\,(\,c_1 \leqslant \overline{C} \leqslant c_2\,) = 0{,}95.$$

Les deux valeurs c_1 et c_2 sont centrées par rapport à la moyenne $\boldsymbol{m = 30}$, avec :

$$c_1 = 30 - a \text{ et } c_2 = 30 + a.$$

Par <u>raisonnement graphique</u>, en raisonnant sur les propriétés de symétrie de la figure, nous avons aussi :

$$P\,(\,-\infty \leqslant \overline{C} \leqslant c_2\,) = P\,(\,-\infty \leqslant T \leqslant t_2\,) = \Pi(\,t_2\,) = 0{,}975.$$

$p = 0{,}95$ est appelé le seuil de confiance. $\alpha = 1 - p = 0{,}05 = 5\%$ est appelé seuil de risque. Les calculatrices ne vont donner que les valeurs de c_2 ou bien $t = t_2$. Nous en déduirons alors la valeur de a à partir de la relation :

$$a = c_2 - m \text{ ou bien } a = t \times \sigma.$$

<u>Donnée(s) :</u> Loi normale, moyenne $\boldsymbol{m = 30, \sigma = 0{,}1}$ et $p = P\,(\,c_1 \leqslant \overline{C} \leqslant c_2\,) = 0{,}95$ *<u>Inconnue(s) :</u>* $a = c_2 - m$ ou bien $a = t \times \sigma$.		
Formulaire	CASIO GRAPH 35+	TI 82 STAT
Utilisons les propriétés de calcul entre les lois normales $p = P\,(\,z_1 \leqslant X \leqslant z_2\,)$ $p = P\,(\,t_1 \leqslant T \leqslant t_2\,)$ $p = \Pi(\,t_2\,) - \Pi(\,t_1\,)$	MENU STAT + touche EXE MAIN MENU RUN·MAT STAT e·ACT S·SHT GRAPH DYNA TABLE RECUR	Touche 2[nd] VARS DISTR DRAW 1:normalpdf(2:normalcdf(3:invNorm(
Déterminons les expressions t_1 et t_2 à partir de c_1 et c_2, puis déterminons l'expression de $\Pi(\,t_2\,) - \Pi(\,t_1\,)$.	Touche F5 (DIST) : Distribution Touche F1 (NORM) : Loi normale Touche F2 (InvN) : <u>Lecture inverse</u>	Choix de la fonction : InvNorm(+ touche EXE
$t = t_2 = (\,c_2 - m\,)\,/\,\sigma = a\,/\,\sigma$ $t_1 = (\,c_1 - m\,)\,/\,\sigma$ $t_1 = -\,a\,/\,\sigma = -\,t_2$ $\Pi(\,t_1\,) = \Pi(\,-\,t\,) = 1 - \Pi(\,t\,)$ et $\Pi(\,t_2\,) - \Pi(\,t_1\,) = 2\,\Pi(\,t\,) - 1$	Entrée des données + touche EXE Inverse Normal Tail :Central Area :0.95 σ :0.1 μ :30 Save Res:None Execute CALC	Entrée des données + touche EXE *<u>Attention :</u>* l'ordre des données est : InvNorm(Aire, m , σ) invNorm(0.975,30 ,0.1) 30.1959964
L'équation vérifié par t est : $2\,\Pi(\,t\,) - 1 = p = 0{,}95$	Inverse Normal x1:Low=29.8040036 x2:Up =30.1959964	
L'équation transformée donne $\Pi(\,t\,) = ½\,(\,p + 1) = 0{,}975$	La CASIO permet d'accéder en même temps à c_1 et c_2 si elle possède l'option TAIL[1] : Central	La TI ne permet d'accéder qu'à la valeur de c_2. Pour accéder à c_1, voir la note[2].
Par lecture inverse : $t = 1{,}96$	$c_2 \approx 30{,}196$	
$a = t \times \sigma = 1{,}96 \times \sigma \approx 0{,}196$	$a = c_2 - m \approx 0{,}196$	

1 Si la calculatrice CASIO <u>ne contient pas</u> l'option Tail, alors par défaut le calcul est identique à la TI. *<u>Attention</u>* $\Pi(\,c_2\,) = 0{,}975$

2 On peut calculer c_1 avec $P\,(\,C \leqslant c_1\,) = ½\,\alpha$. Il suffit de refaire le calcul avec invNorm(0.025,30

c) La règle de décision permettant d'utiliser ce test est la suivante :

Si, dans un échantillon aléatoire de **100 bouteilles, la charge moyenne de compression verticale sur cet échantillon** est comprise dans l'intervalle [$c_1 = 29,804$; $c_2 = 30,196$], alors l'hypothèse H_0 est acceptée, au seuil de confiance de 5%.

Dans le cas contraire ($m \notin [\ c_1 = 29,804\ ;\ c_2 = 30,196\ ]$), l'hypothèse H_0 est refusée, au seuil de confiance de 5%.

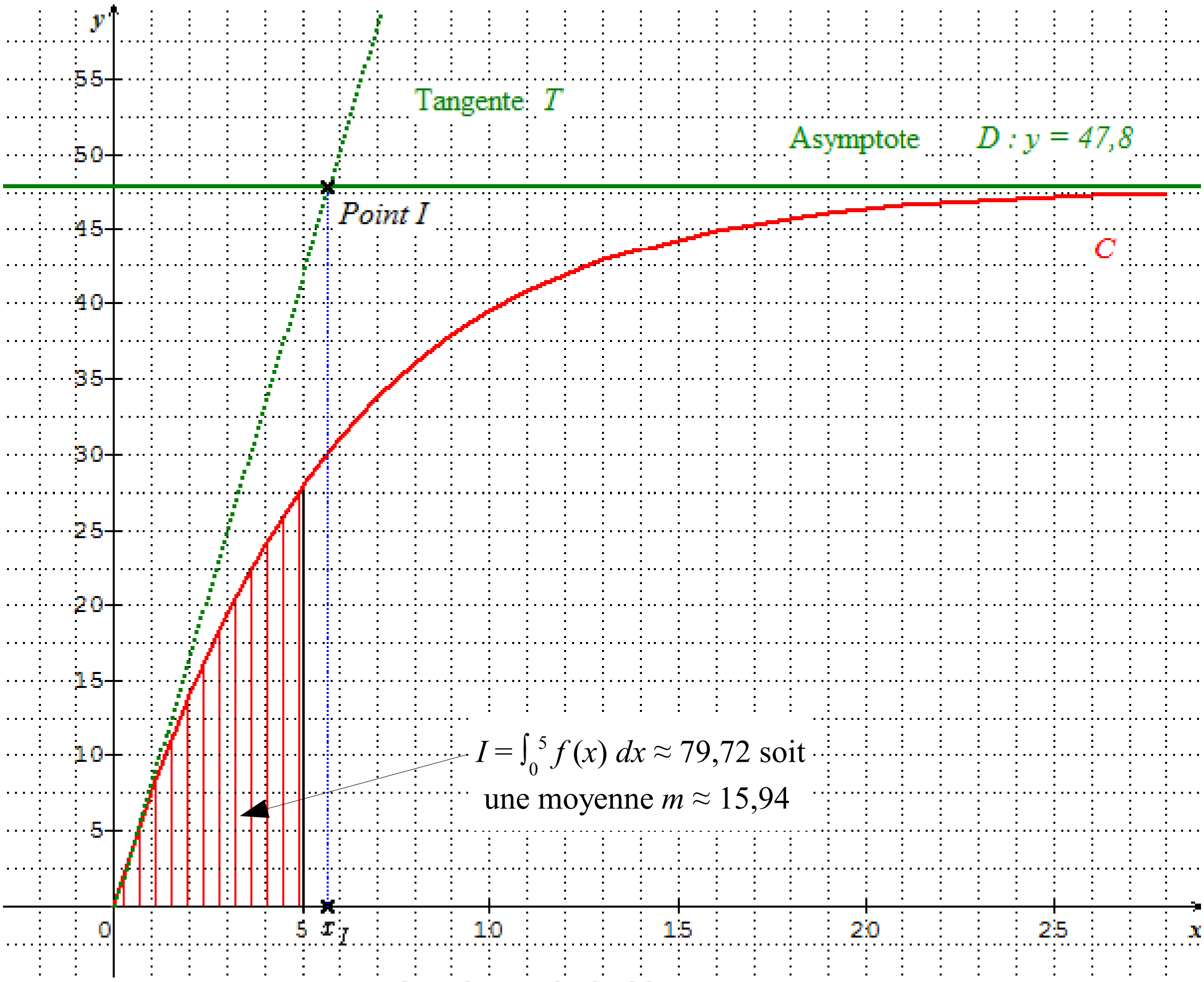
d) La valeur 29,4 **n'appartient pas** à l'intervalle [29,804 ; 30,196], donc l'hypothèse H_0 est **refusée**, au seuil de confiance de 5%.

Puisque l'hypothèse H_0 est **refusée**, on peut en conclure au seuil de risque de 5% que la charge moyenne de compression verticale sur l'ensemble de la production de bouteille est **n'est plus égale** à 30 Newtons.

La qualité des bouteilles s'est dégradée.

<u>Remarque(s):</u> Cette dernière constatation pouvait être faite très rapidement en utilisant les trois grandeurs suivantes : la moyenne $m = 30$, l'écart-type $\sigma = 0,1$ et la valeur mesurée sur l'échantillon $m_e = 29,4$. En effet, la variation entre m_e et m est $m_e - m = -0,6 = -6\ \sigma$. Une telle variation ($6\ \sigma$) est bien supérieure à une variation associée à un seuil de confiance de 95 % (qui est d'environ $\pm 2\ \sigma$ ou bien pour être précis égale à $\pm 1,96\ \sigma$)

ANNEXE



y
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
5
x_I
10
15
20
25
x
Tangente T
Asymptote $D : y = 47,8$
Point I
C
$I = \int_0^5 f(x)\,dx \approx 79,72$ soit
une moyenne $m \approx 15,94$