Sujet d'examen

Thème:

2013_Gr_C: *(Sujet groupement C – Session 2013)*

Table des matières

EXERCICE n°1: (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

La farine est classé selon des « types » définies en fonction du taux de cendres, c'est-à-dire en fonction du taux de minéraux présent dans la farine. Cette teneur en matière minérale est obtenue par une analyse qui consiste à brûler la farine et à peser le résidu : « les cendres ». Plus la farine est blanche, plus le taux de cendres est faible. Quelques exemples de types de farine courants sont répertoriés dans le tableau ci-dessous :

Type de farine	Taux de cendres en %	Nom commun
T 55	Entre 0,5 et 0,6	Farine blanche
T 65	Entre 0,62 et 0,75	Farine bise
T 80	Entre 0,75 et 0,9	Farine semi-complète
T 110	Entre 1 et 1,2	Farine complète

Le problème porte sur l'étude de la production de la farine semi-complète d'une minoterie.

Partie A. Loi normale

Dans un souci de contrôle de la qualité de la production de sa farine semi-complète, une minoterie décide de procéder à un contrôle du taux de cendres.

Le contrôle consiste à prélever 100 g de farine dans un paquet pris au hasard dans la production de farine semi-complète et à analyser ces 100 g.

Un paquet de farine semi-complète est conforme si la masse du résidu, pour les 100 g de farine prélevés est comprise entre 750 mg et 900 mg, *conformément au tableau ci-dessus*.

On appelle X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 g de farine d'un paquet, associe la masse du résidu obtenu en mg. On suppose que X suit la loi normale d'espérance 825 et d'écart-type 32,6.

Déterminer la probabilité qu'un paquet de farine, pris au hasard dans la production de farine semi-complète, soit conforme.

Partie B. Loi binomiale et loi de Poisson

Dans cette partie, on admet que 2% des paquets de la production de farine semi-complète ne sont pas conformes. On choisit au hasard un lot de 50 paquets de farine semi-complète dans la production. On admet que la production est suffisamment importante pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 50 paquets.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de paquets non conformes au type T80, c'est à dire de farine semi-complète.

1. Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus un paquet non conforme dans le lot.

3. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.

- **a)** Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
- **b)** A l'aide de cette loi, calculer la probabilité qu'il y ait moins de quatre paquets non conformes dans ce lot.

Partie C. Test d'hypothèse

Une nouvelle qualité de blé est utilisé dans la minoterie pour fabriquer de la farine semi-complète. Afin de procéder à d'éventuels réglages des machines, on veut tester si la moyenne m de la masse des résidus des prélèvements de 100 g de farine est toujours 825 mg.

Pour cela, on construit un test d'hypothèse bilatéral. On suppose que la variable aléatoire $\overline{Z}$, qui, à tout prélèvement de 50 paquets choisis au hasard dans la production utilisant la nouvelle qualité de blé, associe la moyenne des masses des résidus des prélèvements de 100 g par paquet, suit une loi normale d'espérance m et d'écart-type 4,6.

On choisit l'hypothèse nulle H_0 : « $m = 825$ ».

1. Préciser l'hypothèse alternative H_1.

2. Calculer le réel h tel que $P\ (\ 825 - h \leqslant\ \overline{Z}\ \leqslant 825 + h\ ) = 0{,}95$.

3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

4. On prélève au hasard 50 paquets dans la production réalisée avec la nouvelle qualité de blé. La moyenne des masses des résidus des prélèvements de 100 g par paquet est 860 mg.

Que peut-on conclure au risque de 5% ?

EXERCICE n°2: (10 points)

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans une entreprise, lors d'une intervention sur la sécurité routière, on s'intéresse au taux d'alcool dans le sang. Dans cet exercice, ce taux sera utilisé sans précision de l'unité.

Partie A. Taux d'alcool, deux exemples

Le tableau suivant donne les quantités d'alcool contenues dans certaines boissons alcoolisées.

Consommation	Quantité d'alcool (en g)
Un verre de 25 cl de bière	13 g
Un verre de 10 cl de vin	8 g
Une flûte de champagne	8 g
Un verre de 4 cl de whisky	13,2 g
Un verre de 5 cl d'apéritif	9 g

Environ une heure après ingestion, on peut estimer le taux T d'alcool dans le sang d'une personne, en fonction de <u>*sa masse*</u> P, en kilogrammes, de la quantité d'alcool ingérée Q, en grammes, et d'un coefficient de diffusion K, à l'aide la formule :

$$T = \frac{Q}{P \times K}$$

On admet que $K = 0{,}7$ pour les hommes et $K = 0{,}6$ pour les femmes.

1. A l'aide de la formule, estimer le taux d'alcool dans le sang, environ une heure après ingestion, d'un homme de 75 kg ayant consommé une verre de 25 cl de bière, deux verres de 10 cl de vin et une flûte à champagne.

2. Estimer la quantité d'alcool ingérée par une femme de 55 kg dont le taux d'alcool mesuré est 0,5 une heure après ingestion.

Partie B. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle, notée (E) : $y' + y = 2\,\mathrm{e}^{-t}$, où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[\,0{,}025\,;+\infty\,[$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.

2. Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction g, définie sur $[\,0{,}025\,;+\infty\,[$ par :

$$g(t) = a \times t \times \mathrm{e}^{-t}$$

soit une solution particulière de l'équation (E).

3. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0{,}025) = 0$.

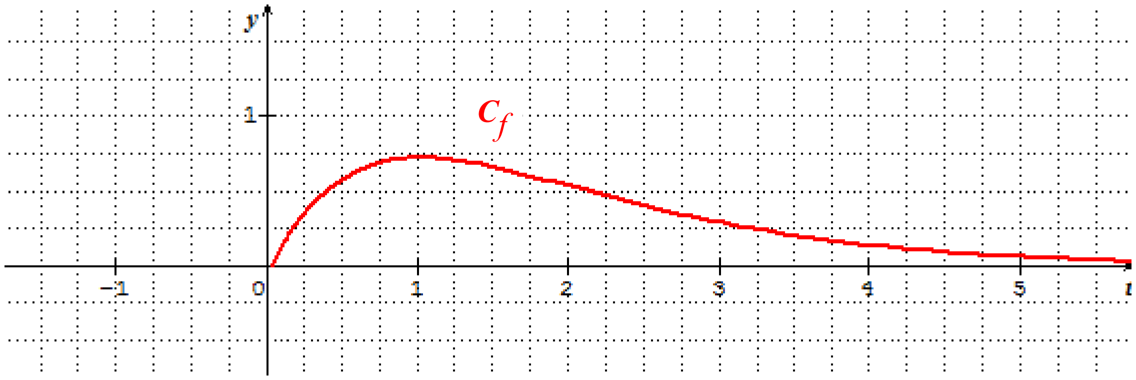
Partie C. Lectures graphiques

Une personne a ingéré une certaine quantité d'alcool. On s'intéresse à l'évolution du taux d'alcool dans le sang de cette personne, en fonction du temps t, en heures.

Compte tenu du délai d'absorption par l'organisme, le taux d'alcool dans le sang de cette personne est donné par la fonction f définie sur $[\,0{,}025\,;+\infty\,[$ par :

$$f(t) = (\,2\,t - 0{,}05\,) \times \mathrm{e}^{-t}$$

La représentation graphique $\boldsymbol{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormal est fournie ci-dessous.



1. Déterminer, à l'aide du graphique ci-dessus, pendant combien de temps le taux d'alcool dans le sang de cette personne reste supérieur à 0,5.

2. Déterminer, à l'aide du graphique, à quel instant le taux est maximum et donner ce maximum.

Partie D. Étude d'une fonction

<u>Rappel(s) :</u> La fonction f est définie sur $[\,0{,}025\,;+\infty\,[$ par : $f(t) = (\,2\,t - 0{,}05\,) \times \mathrm{e}^{-t}$

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que :

$$f'(t) = (\,2{,}05 - 2\,t\,) \times \mathrm{e}^{-t}$$

2. Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire la valeur exacte du maximum de la fonction f.

3. Démontrer que la fonction F définie sur $[\,0{,}025\,;+\infty\,[$ par :

$$F(t) = (-2\,t - 1{,}95) \times \mathrm{e}^{-t}$$

est une primitive de la fonction f sur $[\,0{,}025\,;+\infty\,[$.

4. On considère $T_m = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 f(t)\,dt$. T_m est le taux d'alcool moyen entre les instants $t = 2$ et $t = 4$.

Calculer la valeur exacte de T_m et en donner une valeur arrondie à 0,01 près.