

## Sujet d'examen

**Thème:**

**2008\_Gr\_C:**    (*Sujet groupement C – Session 2008*)

### Table des matières

|                                                             |   |
|-------------------------------------------------------------|---|
| EXERCICE n°1: (9 points).....                               | 2 |
| Partie A. Résolution d'une équation différentielle.....     | 2 |
| Partie B. Étude de fonction.....                            | 2 |
| EXERCICE n°2: (11 points).....                              | 2 |
| Partie A. Loi normale, intervalle de confiance.....         | 2 |
| Partie B. Loi binomiale.....                                | 3 |
| Partie C. Test d'hypothèse et calcul de valeur moyenne..... | 3 |

## EXERCICE n°1: (9 points)

### Partie A. Résolution d'une équation différentielle

L'étude d'un mouvement a montré que la vitesse exprimée en mètres par seconde est une fonction dérivable  $y$  de la variable réelle positive  $t$  vérifiant l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 2y = 50$$

1. Résoudre sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , l'équation différentielle  $y' + 2y = 0$ .
2. Déterminer une fonction constante solution de l'équation (E) sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
3. En déduire la solution générale de (E) sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
4. Sachant que la vitesse initiale à l'instant  $t = 0$  est nulle, déterminer la vitesse  $y$  en fonction de  $t$ .

### Partie B. Étude de fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $f(t) = 25(1 - e^{-2t})$ .

On donne sur la feuille *annexe*, à remettre avec la copie, la représentation graphique  $C$  de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal.

La fonction  $f$  représente la fonction vitesse déterminée dans la *Partie A*.

**Le but de l'exercice est de justifier et de compléter la représentation graphique de la fonction  $f$  donnée en *annexe*.**

1.
  - a) Par lecture graphique, déterminer une valeur arrondie au dixième de l'instant  $t_0$  où la vitesse dépasse  $20 \text{ m.s}^{-1}$ .
  - b) Résoudre l'inéquation  $f(t) > 20$ . En déduire la valeur exacte de  $t_0$ .
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en donner une interprétation graphique.
3. Démontrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
4. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe au point  $O$ , origine du repère.  
Construire cette droite sur l'*annexe* à remettre avec la copie.
5. En utilisant le graphique donné en *annexe*, estimer l'aire en unités d'aire de la partie du plan compris entre la courbe  $C$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $t = 1$  et  $t = 2$ .
6. Calcul intégral.
  - a) Déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
  - b) Calculer l'intégrale  $\int_1^2 f(t) dt$ . En donner une interprétation graphique.

## EXERCICE n°2: (11 points)

*Les résultats seront arrondis au centième.*

### Partie A. Loi normale et intervalle de confiance

Dans une usine, une machine produit des barres de métal.

Dans cette partie on étudie la longueur de ces barres.

On définit la variable aléatoire  $X$  qui à chaque barre associe sa longueur exprimée en centimètres et on admet que la variable aléatoire  $X$  suit une loi normale de moyenne  $m = 92,50$  et d'écart-type  $\sigma$ .

Une barre de la production est mise au rebut si sa longueur est inférieure à  $92,20 \text{ cm}$  ou

supérieure à 92,80 cm.

1. On suppose que  $\sigma = 0,20$ .

a) Calculer la probabilité qu'une barre extraite au hasard dans la production de la machine soit mise au rebut.

b) Déterminer le réel  $a$  tel que la probabilité que la variable aléatoire  $X$  prenne des valeurs comprises entre  $92,5 - a$  et  $92,5 + a$  soit égale à 0,95.

2. Quelle valeur faut-il donner à l'écart-type  $\sigma$  pour la probabilité de mise au rebut d'une barre soit égale à 0,08 ?

**Dans la suite de l'exercice, on suppose que  $\sigma = 0,17$ .**

### Partie B. Loi binomiale

Dans la production de la machine, 8% des barres sont mises au rebut. On prélève un lot de 30 barres extraites au hasard dans la production de la machine. Le nombre de barres produites est suffisamment important pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 barres.

On appelle  $N$  la variable aléatoire qui à chaque lot de 30 barres associe le nombre de barres qui sont mises au rebut dans ce lot.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire  $N$  et donner ses paramètres.

Justifier vos résultats.

2. Calculer la probabilité qu'aucune barre de ce lot ne soit mise au rebut.

3. Calculer la probabilité que dans un tel lot, au moins 90% des barres ne soient pas mises au rebut.

### Partie C. Test d'hypothèse et calcul de valeur moyenne

La machine se dérégulant au cours du temps, on veut tester la moyenne  $m$  des longueurs des barres produites par la machine. On se demande si on peut accepter, au seuil de risque de 5%, l'hypothèse selon laquelle la moyenne  $m$  des longueurs des barres est encore de 92,50 cm.

Pour cela, on construit un test d'hypothèse bilatéral.

On suppose que la variable aléatoire  $\bar{X}$ , qui à tout échantillon de 30 barres de métal prélevées au hasard associe la moyenne des longueurs en centimètres des barres de l'échantillon, suit une loi normale de moyenne  $m$  et d'écart-type  $\sigma = 0,03$ .

On choisit l'hypothèse nulle  $H_0$  : «  $m = 92,50$  ».

1. Quelle est l'hypothèse alternative  $H_1$  ?

2. Sous l'hypothèse  $H_0$ , déterminer le nombre réel  $h$  tel que :

$$P(92,5 - h \leq \bar{X} \leq 92,5 + h) = 0,95.$$

3. Énoncer la règle de décision du test.

4. On prélève un échantillon aléatoire de 30 barres extraites au hasard dans la production de la machine, on obtient les résultats suivantes:

|                   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Longueurs (en cm) | 92,1 | 92,2 | 92,3 | 92,4 | 92,5 | 92,6 | 92,7 | 92,8 | 92,9 |
| Nombre de barres  | 3    | 2    | 6    | 5    | 5    | 3    | 2    | 2    | 2    |

a) Calculer la moyenne  $m_e$  de la série statistique ci-dessus.

b) Au vu des résultats de cet échantillon, peut-on admettre au seuil de risque de 5%, l'hypothèse selon laquelle la moyenne  $m$  des longueurs des barres est encore de 92,50 cm ?

ANNEXE ( A remettre avec la copie)

EXERCICE n°1

Courbe représentative de la fonction  $f$

