Sujet d'examen

Thème:

2006_Gr_C: *(Sujet groupement C – Session 2006)*

Table des matières

EXERCICE n°1: (10 points)

y désigne une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue y suivante : $y'' - 4\,y' + 3\,y = -\,3\,x - 2$.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

1. Résoudre sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation différentielle $y'' - 4\,y' + 3\,y = 0$.

2. Solution particulière

a) Soit a et b deux réels. On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g(x) = a\,x + b$. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g soit une solution particulière de (E).

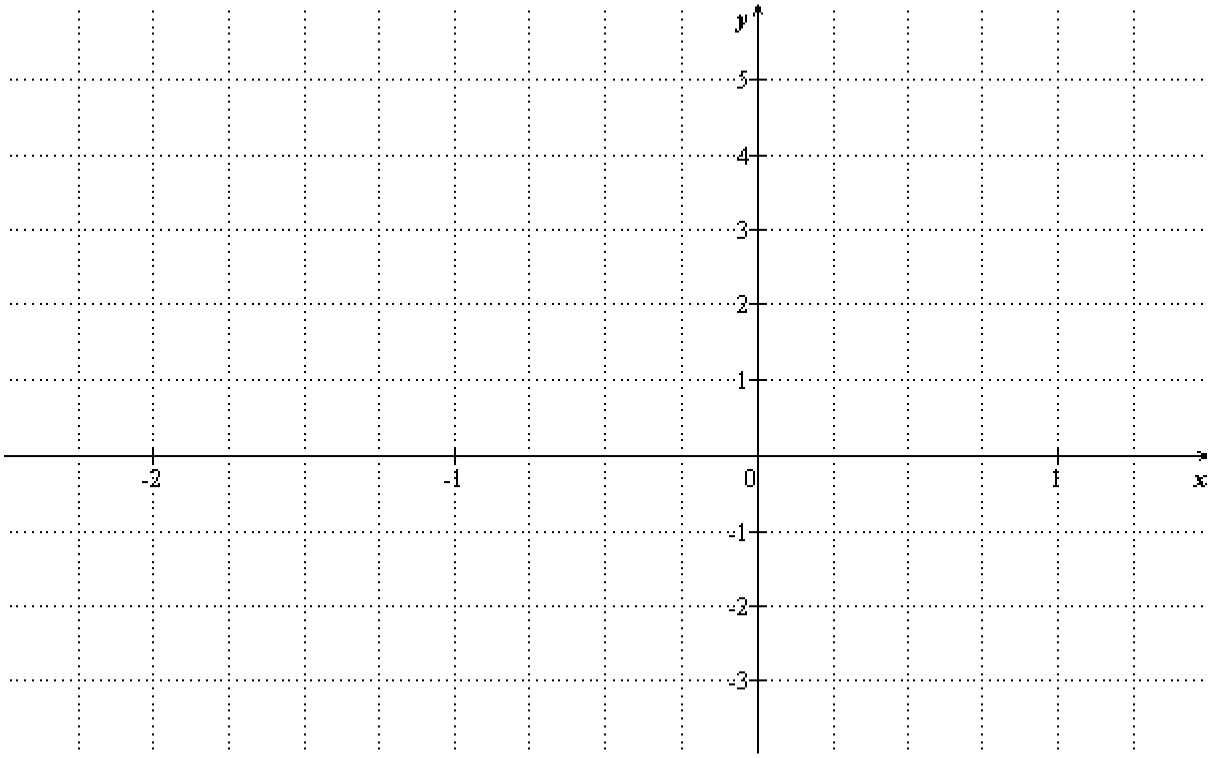
b) Résoudre l'équation (E).

3. Déterminer la fonction f, solution particulière sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels de l'équation (E), telle que : $f(0) = -\,1$ et $f''(0) = 9$

Partie B. Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{3x} - x - 2$.

<u>Aide(s):</u> *Repère pour la représentation graphique de **C** et de **D**.*



1. Déterminer la limite de f en $-\,\infty$.

2. Déterminer la limite de f en $+\,\infty$.

3. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

4. Soit ***C*** la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées. Montrer que la courbe ***C*** admet pour asymptote la droite ***D*** d'équation $y = -\,x - 2$ au voisinage de

$-\infty$.

5. Déterminer les positions relatives de la courbe $\boldsymbol{C}$ et de la droite $\boldsymbol{D}$ selon les valeurs de x.

6. Tracer $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{C}$.

Partie C. Calcul intégral

Calculer l'aire $\boldsymbol{A}$, en cm^2, du domaine compris entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$, la droite $\boldsymbol{D}$ et la courbe $\boldsymbol{C}$. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de $\boldsymbol{A}$.

EXERCICE n°2: (10 points)

On donnera la valeur arrondie au millième de chacun des résultats de cet exercice.

Une entreprise fabrique des jouets en bois en grand série. On s'intéresse à l'une des pièces de ce jouet comportant une partie cylindrique permettant l'assemblage des différents éléments du jouet.

Partie A. Loi normale

Pour que l'assemblage soit réalisable, c'est-à-dire que la pièce étudiée soit conforme, le diamètre de la partie cylindrique doit être compris entre 13,7 mm et 14,2 mm. Soit X la variable aléatoire qui, à toute pièce prélevée au hasard dans la production de l'entreprise, associe le diamètre de la partie cylindrique. On admet que X suit une loi normale $\mathcal{N}$ ($m = 14$; $\sigma = 0{,}1$)

Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production soit conforme.

Partie B. Loi binomiale

Dans cette partie, on considère que 2,4% des pièces de la production ne sont pas conformes. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 unités prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de pièces non conformes. On admet que la production de l'entreprise est suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

1. Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier la réponse. En donner le (ou les) paramètre(s).

2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins trois pièces non conformes dans un lot de 100 unités?

3. On approche la variable aléatoire Y par une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson.

a) Donner le paramètre de cette loi.

b) À l'aide de la variable aléatoire Z, calculer une estimation de la probabilité qu'il y ait exactement trois pièces non conformes dans un lot de 100 unités.

Partie C. Test d'hypothèse et calcul de moyenne d'un échantillon

L'assemblage des pièces du jouet doit être définitif. Ainsi, la partie cylindrique de la pièce étudiée dans les parties *A* et *B* est enduite de colle avant assemblage.

Le jouet est destiné à des enfants de moins de 36 mois. Ces enfants ne doivent en aucun cas pouvoir arracher la pièce du jouet, celle-ci présentant un risque d'ingestion.

Pour cette raison, l'entreprise réalise un test d'arrachement sur des échantillons de 50 jouets prélevées au hasard. Ces prélèvement sont assimilés à des tirages avec remise, compte tenu du grand nombre de jouets produits.

Soit $\overline{R}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 jouets, associe la résistance mécanique moyenne de l'assemblage. Cette résistance mécanique est exprimée en déca-newton, noté daN.

Soit r la résistance mécanique moyenne inconnue de l'ensemble des jouets produits par l'entreprise. On admet que suit $\overline{R}$ la loi normale $\mathcal{N}(\, r\, ;\, 1 / \sqrt{50}\,)$

On construit un test d'hypothèse unilatéral au risque de 1%, destiné à savoir si la résistance mécanique moyenne des assemblages est égale à 10 daN.

On donne l'hypothèse alternative $H_1 : r > 10$.

1. Donner l'hypothèse nulle H_0.

2. Sous l'hypothèse H_0, quelle est la loi suivie par $\overline{R}$?

3. Sous l'hypothèse H_0, calculer le réel h tel que $P(\, \overline{R} \leqslant 10 + h\,) = 0{,}99$.

4. Quelle est la règle de décision du test ?

5. Sur un échantillon de 50 jouets, on a relevé les résistances exprimées dans le tableau ci-dessous.

Résistance (daN)	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13
Effectifs	1	0	1	3	9	9	10	9	3	2	2	1

a) Calculer la moyenne r_e et l'écart-type σ_e de cet échantillon. *Aucune justification de ces résultats n'est demandée.*

b) Au seuil de risque de 1%, et d'après cet échantillon, les jouets produits par l'entreprise sont-ils assez solides ?