Sujet d'examen

Thème:

2005_Gr_C: *(Sujet groupement C – Session 2005)*

Table des matières

EXERCICE n°1: (9 points)....................2
Partie A. Résolution d'une équation différentielle....................2
Partie B. Étude d'une fonction....................2
Partie C. Calcul intégral....................3
EXERCICE n°2: (11 points)....................3
Partie A. Probabilités....................3
Partie B. Ajustement affine....................3
Partie C. Loi binomiale....................3
Partie D. Test d'hypothèse....................4

EXERCICE n°1: (9 points)

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2\,y = 4x$ où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1. Soit l'équation différentielle (E') : $y' - 2\,y = 0$.
Résoudre l'équation différentielle (E').

2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction g, définie pour tout réel x par $g(x) = a\,x + b$, soit une solution particulière de (E).

3.

a) Résoudre l'équation différentielle (E).

b) Déterminer la fonction f, solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) satisfaisant la condition $f(0) = 0$.

Partie B. Étude d'une fonction

Soit la fonction f, définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2\,x - 1$.

1. Limites

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

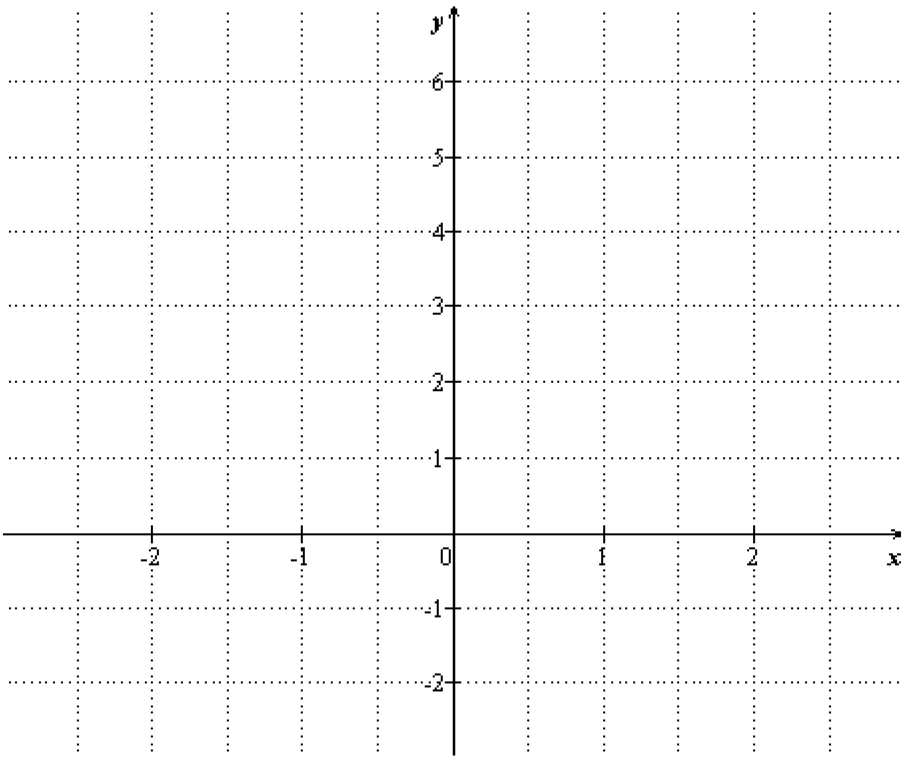
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre $2\,x$ en facteur dans l'expression de $f(x)$).

2. Soit $f\,'$ la fonction dérivée de f. Déterminer $f\,'(x)$.

a) Étudier le signe de $f\,'(x)$.

b) En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.

*Aide(s): Repère pour la représentation graphique de **C** et de **D**.*



Partie C. Calcul intégral

On note ***C*** la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Montrer que la droite ***D*** d'équation $y = -2x - 1$ est asymptote à la courbe ***C*** au voisinage de $-\infty$.

2. Construire la courbe ***C*** et la droite ***D***.

3. On considère l'aire ***A*** du domaine plan délimité par la courbe ***C***, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer la valeur exacte de ***A*** au cm^2, puis en donner l'approximation décimale arrondie au centième.

EXERCICE n°2: (11 points)

Les parties A, B, C et D peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Une entreprise produit en série des axes de moteurs électriques. Cette entreprise possède trois machines, que l'on appellera E, F et G. Chaque axe est produit par l'une de ces trois machines.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-4}.

Partie A. Probabilités.

Les machines E, F et G produisent respectivement 25%, 35% et 40% de la production totale.

On constate, un jour donné de production, que les machines E, F et G produisent respectivement 1,5%, 2,5% et 3% d'axes défectueux.

Montrer que la probabilité de prélever au hasard un axe défectueux dans la production totale de l'entreprise de ce jour est de 0,0245.

Partie B. Ajustement affine

Dans cette partie, on s'intéresse aux axes de moteurs électriques produits par la machine E.

La machine E se déréglant au cours du temps, on décide de noter chaque jour le pourcentage des axes défectueux produits. On obtient alors le tableau suivant:

Jours x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentage d'axes défectueux y_i	0,8	1,1	1,9	2,3	2,1	2,4	2,8	2,9

1. Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthodes moindres carrés. (Les résultats seront arrondis à 10^{-3}.)

2. En admettant que l'évolution du pourcentage d'axes défectueux constatée pendant huit jours se poursuive les jours suivants, quel est le pourcentage prévisible, arrondi à 0,1% d'axes défectueux produits le onzième jour par la machine E ?

Partie C. Loi binomiale

Dans cette partie, on s'intéresse aux axes de moteurs électriques produits par la machine F.

La machine F produit 2,5% d'axes défectueux. On prélève au hasard, dans la production de la machine F, un lot de 50 axes. La production est suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 50 axes de moteurs électriques, associe le nombre d'axes défectueux.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y. Justifier la réponse.

2. Calculer la probabilité que le lot contienne exactement deux axes défectueux (le résultat sera arrondi à 10^{-3}).

Partie D. Test d'hypothèse

Dans cette partie, on s'intéresse aux axes de moteurs électriques produits par la machine G.

La machine G est bien réglée si, dans la production d'une journée, la moyenne des longueurs des axes est de 350 millimètres.

Pour vérifier le réglage de la machine G on construit un test d'hypothèse bilatéral au risque de 5%.

1. Test d'hypothèse

a) Quelle est l'hypothèse nulle H_0 ? Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?

b) On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 axes prélevés dans la production de la machine G associe la moyenne des longueurs de ces axes. La production de la machine G est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On suppose que, sous l'hypothèse nulle H_0, la variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne 350 et d'écart-type 0,5.

Sous l'hypothèse H_0, déterminer le réel h tel que : $P(350 - h \leqslant \overline{X} \leqslant 350 + h) = 0{,}95$

c) Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

2. On prélève un échantillon aléatoire de 100 axes et on constate que la moyenne des longueurs des axes de cet échantillon est de 349. Peut-on, au seuil de risque de 5%, conclure que la machine G est bien réglée ?