Sujet d'examen

Thème:

2014_Gr_B: *(Sujet groupement B – Session 2014)*

Table des matières

EXERCICE n°1: (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2\,y' + y = 2\ \mathrm{e}^{-x}$, où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 2\,r + 1 = 0$.

b) En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 2\,y' + y = 0$.

2. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Une solution de l'équation différentielle (E) est donné par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression ci-dessous.

$g(x) = 2\,e^{-x}$	$h(x) = x^2\,e^{-x}$	$k(x) = 2\,x\,e^{-x}$

Les dérivées première et seconde de ces fonctions sont données ci-dessous (ces calculs sont exacts).

$$g'(x) = -2\ \mathrm{e}^{-x} \qquad h'(x) = (\,2\,x - x^2\,)\ \mathrm{e}^{-x} \qquad k'(x) = (\,2 - 2\,x\,)\ \mathrm{e}^{-x}$$
$$g''(x) = 2\ \mathrm{e}^{-x} \qquad h''(x) = (\,x^2 - 4\,x + 2\,)\ \mathrm{e}^{-x} \qquad k''(x) = (\,-4 + 2\,x\,)\ \mathrm{e}^{-x}$$

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales :

$$f(0) = -1 \text{ et } f'(0) = 1.$$

CORRECTION

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 2\,r + 1 = 0$. $\boxed{a=1,\ b=2,\ c=1,\ \Delta=0,\ r_1=r_2=-\dfrac{b}{2\,a}=-1}$

b) D'après le formulaire, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_0) sont : $\boxed{y_0(x)=(\lambda\,x+\mu)\times e^{-x}}$

2. Il suffit de <u>vérifier</u> laquelle des trois fonctions g, h ou k vérifie l'équation (E) :
Pour g : $g'' + 2\,g' + g = 2\ \mathrm{e}^{-x} - 4\ \mathrm{e}^{-x} + 2\ \mathrm{e}^{-x} = 0$. g vérifie bien (E_0) mais ne vérifie pas (E).
Pour h : $h'' + 2\,h' + h = (\,x^2 - 4\,x + 2\,)\ \mathrm{e}^{-x} + 2\,(\,2\,x - x^2\,)\ \mathrm{e}^{-x} + x^2\ \mathrm{e}^{-x} = 2\ \mathrm{e}^{-x}$. h vérifie bien (E).
Pour k : $k'' + 2\,k' + k = (\,-4 + 2\,x\,)\ \mathrm{e}^{-x} + 2\,(\,2 - 2\,x\,)\ \mathrm{e}^{-x} + 2\,x\ \mathrm{e}^{-x} = 0$.
k vérifie bien (E_0) mais ne vérifie pas (E).

La solution particulière de l'équation différentielle (E) est la fonction h.

3. $\boxed{y_{\mathrm{g}}(x)=y_0(x)+y_{\mathrm{p}}(x)\ \Leftrightarrow\ y_{\mathrm{g}}(x)=(\lambda\,x+\mu)\times e^{-x}+x^2\,e^{-x}}$

4. Les conditions initiales sont $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
Il faut dériver la fonction y_{g}. y_0 est une fonction de type $U \times V$ donc : $\boxed{y'_0(x)=(\lambda-\lambda\,x-\mu)\times e^{-x}}$
La dérivée de y_{g} est donc : $\boxed{y'_{\mathrm{g}}(x)=y'_0(x)+h'(x)\Leftrightarrow y'_{\mathrm{g}}(x)=(\lambda-\lambda\,x-\mu)\times e^{-x}+(2\,x-x^2)\,e^{-x}}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} f(0)=-1 \\ f'(0)=1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \mu=-1 \\ \lambda-\mu=1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \mu=-1 \\ \lambda=0 \end{pmatrix} \text{ et } f(x)=-1\,e^{-x}+x^2\,e^{-x} \text{ ou bien } f(x)=(x^2-1)\,e^{-x}}$$

<u>*Remarque(s) :*</u> On retrouve bien la fonction f de la *partie B* de cet exercice.

Partie B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 1) \times e^{-x}$.

On désigne par $\boldsymbol{C}$ sa courbe représentative de f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Un logiciel de calcul formel fournit ci-dessous une expression de la dérivée de f. Ce logiciel note `%e - x` la quantité e^{-x}.

```
(%i1) f(x) := (x^2 - 1)*%e^(-x);
(%o1) f(x) := (x^2 - 1) %e^-x
(%i2) factor(diff(f(x),x));
(%o2) -(x^2 -2x - 1) %e^-x
```

Justifier par un calcul l'expression de $f'(x)$ affichée à la ligne notée `(%o2)`.

b) On rappelle qu'une équation de la tangente T à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse a est donnée par : $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.
Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0.

2. Développement limité

a) A l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \rightarrow e^{t}$, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \rightarrow e^{-x}$.

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = -1 + x + \tfrac{1}{2} x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \rightarrow 0.$$

c) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On veut justifier qu'au voisinage de point d'abscisse 0, la courbe $\boldsymbol{C}$ est au dessus de la droite T.
Recopier sur la copie la justification qui vous paraît exacte.

$-1 + x$ est positif au voisinage de 0.	$\tfrac{1}{2} x^2$ est positif au voisinage de 0.	$x^2 \varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.

CORRECTION

3. a) La fonction f de type $U \times V$ donc pour la dérivée f', nous avons :

$$U(x)=x^2-1 \quad \rightarrow \quad U'(x)=2x$$
$$V(x)=e^{-x} \quad \rightarrow \quad V'(x)=-e^{-x}$$
$f'(x)=U'V+UV'$. Voir le formulaire pour la formule.
$$f'(x)=2xe^{-x}+(x^2-1)\times(-e^{-x}) \Leftrightarrow f'(x)=2xe^{-x}+(-x^2+1)\times(e^{-x})$$
$$f'(x)=(-x^2+2x+1)\times(e^{-x}) \Leftrightarrow f'(x)=-(x^2-2x-1)\times(e^{-x})$$

On retrouve bien la ligne `(%o2)` indiquée par le logiciel de calcul formel.

b) Pour déterminer une équation de la tangente T à la courbe ***C*** au point d'abscisse 0, il suffit d'appliquer la formule donnée en remplaçant a par 0.

$f'(0)=1$, $f(0)=-1$. Une équation de la tangente est donc : $y=x-1$.

4. Développement limité

a) Écrivons le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \rightarrow e^t$, développement limité extrait du formulaire,

$$e^t = 1 + t / (1!) + t^2 / (2!) + t^2 \varepsilon(t) \text{ avec } \lim \varepsilon(t) = 0 \text{ pour } t \rightarrow 0.$$

Remplaçons t par $(-x)$ **uniquement** dans la fonction **et** dans la partie régulière du développement limité, afin d'obtenir le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \rightarrow e^{-x}$. Dans le terme complémentaire, t est remplacé par x. On obtient :

$$e^{-x} = 1 + (-x) / (1!) + (-x)^2 / (2!) + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \rightarrow 0.$$

<u>*Rappel(s)*</u> sur la notation factorielle : factorielle n ($n \in \mathbb{N}$) noté $n!$ est le produit des entiers de 1 jusqu'à n. on a donc $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ … En utilisant ce rappel, on obtient :

$$e^{-x} = 1 - x + ½\, x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \rightarrow 0.$$

b) <u>*Règle n°1*</u> sur les développements limités : toutes les opérations ne portent que sur les parties régulières des développements limités. Appliquons cette règle :

$(x^2 - 1)\, e^{-x} = (x^2 - 1) \times (1 - x + ½\, x^2) + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim \varepsilon(x) = 0$ pour $x \rightarrow 0$.

Développons $= x^2 - x^3 + ½\, x^4 - 1 + x - ½\, x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim \varepsilon(x) = 0$ pour $x \rightarrow 0$.

Simplifions $= -1 + x + ½\, x^2 - x^3 + ½\, x^4 + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim \varepsilon(x) = 0$ pour $x \rightarrow 0$.

<u>*Règle n°2*</u> sur les développements limités : On ne fait apparaitre dans l'expression d'un DL que les termes de rang p inférieur ou égal à l'ordre n imposé du DL.
En appliquant cette règle, le terme de rang 3 en x^3 et de rang 4 en x^4 n'apparaîtront pas dans le DL car l'ordre n imposé et $n = 2$. On obtient finalement :

$$f(x) = -1 + x + ½\, x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \rightarrow 0.$$

c) <u>*Propriété n°1*</u> sur les développements limités : le terme $a_0 + a_1 x$ du développement limité est l'équation $y = a\,x + b$ de la tangente T_Y à la courbe $\boldsymbol{C_f}$ au point Y d'abscisse $x = 0$. On retrouve la réponse à question **1.b)** $y = -1 + x$ ou bien $y = x - 1$.

<u>*Propriété n°2*</u> sur les développements limités : L'étude du signe du terme qui suit l'équation de T_Y dans le DL de f (de rang 2 ou 3) au voisinage de $x = 0$ donne la position (dessus ou dessous) de la courbe $\boldsymbol{C_f}$ par rapport a la tangente T_Y : si le signe est <u>positif</u>, alors $\boldsymbol{C_f}$ est au <u>dessus</u> de T_Y et si le signe est <u>négatif</u> alors $\boldsymbol{C_f}$ est au <u>dessous</u> de T_Y .

Le terme qui suit l'équation de T_Y dans le DL est : $\boxed{+ ½\, x^2}$ (Réponse B)

Partie C. Calcul intégral

1. On note $I = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans la *Partie B.*

a) Un logiciel de calcul formel fournit, à la ligne notée `(%o3)`, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f. Ce logiciel note `%e` $^{-x}$ la quantité e^{-x}.

```
(%i3) factor(integrate(f(x),x));
(%o3) -(x+1)^2 %e^-x
```

Justifier ce résultat.

b) Montrer que la valeur exacte de I est : $I = 4\,e^{-1} - 16\,e^{-3}$.

2. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On admet que $f(x)$ est positif pour x dans l'intervalle [1 , 3].

I est une mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe ***C*** et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.	I est une mesure, en cm^2, de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe ***C*** et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.	I est une mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe ***C*** et les droites d'équation $y = 1$ et $y = 3$.

CORRECTION

1. Soit $F(x)$ la fonction définie par $F(x) = -(x+1)^2\,e^{-x}$. Il suffit de montrer que la dérivée de la fonction F est la fonction f pour montrer que F est une primitive de la fonction f.

a) La fonction F de type $U \times V$ donc pour la dérivée F', nous avons :

$$U(x) = -(x+1)^2 = -x^2 - 2x - 1 \quad \rightarrow \quad U'(x) = -2x - 2$$
$$V(x) = e^{-x} \quad \rightarrow \quad V'(x) = -e^{-x}$$
$F'(x) = U'V + UV'$. Voir le formulaire pour la formule.
$$F'(x) = (-2x-2)e^{-x} + (-x^2-2x-1)\times(-e^{-x}) \Leftrightarrow F'(x) = (-2x-2)e^{-x} + (x^2+2x+1)\times(e^{-x})$$
$$F'(x) = (x^2-1)\times(e^{-x}) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

On retrouve bien pour F' la fonction f. F est bien une primitive de la fonction f.

b) Par définition de l'intégrale, nous avons $I = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1)$. Soit :

$$F(3) = -4^2 e^{-4} = -16e^{-4},\ F(1) = -2^2 e^{-1} = -4e^{-1} \text{ soit } I = -16e^{-4} + 4e^{-1}.$$

2. Réponse A.

<u>*Remarque(s) :*</u> Pour la proposition B, les unités sont les deux axes ne sont pas fournis. Il est donc impossible de savoir si I est une mesure en cm^2. Pour la proposition C, les droites d'équation $y = 1$ et $y = 3$ sont des droites horizontales. Ces données sont incompatibles avec les bornes d'intégrations qui sont $x = 1$ et $x = 3$.

EXERCICE n°2: (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Un fournisseur d'accès à Internet étudie les défaillances de son système de transmission par ADSL.

Partie A. Événements indépendants

On considère que les défauts d'éligibilité à l'ADSL sont dus à deux causes principales :
– le diamètre des fils de cuivre utilisés entre le central et le domicile de l'abonné est trop faible (inférieur à 0,4 mm),
– la distance entre le domicile de l'abonné et le central téléphonique est trop importante.

On considère un abonné pris au hasard dans un département donné. On note A l'évènement « le diamètre des fils entre le central et le domicile de l'abonné est trop faible », et B l'évènement « la distance entre le domicile de l'abonné et le central téléphonique est trop importante ».

Une étude statistique permet d'admettre que les probabilités des évènements A et B sont :
$P(A) = 0{,}02$ et $P(B) = 0{,}085$. On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

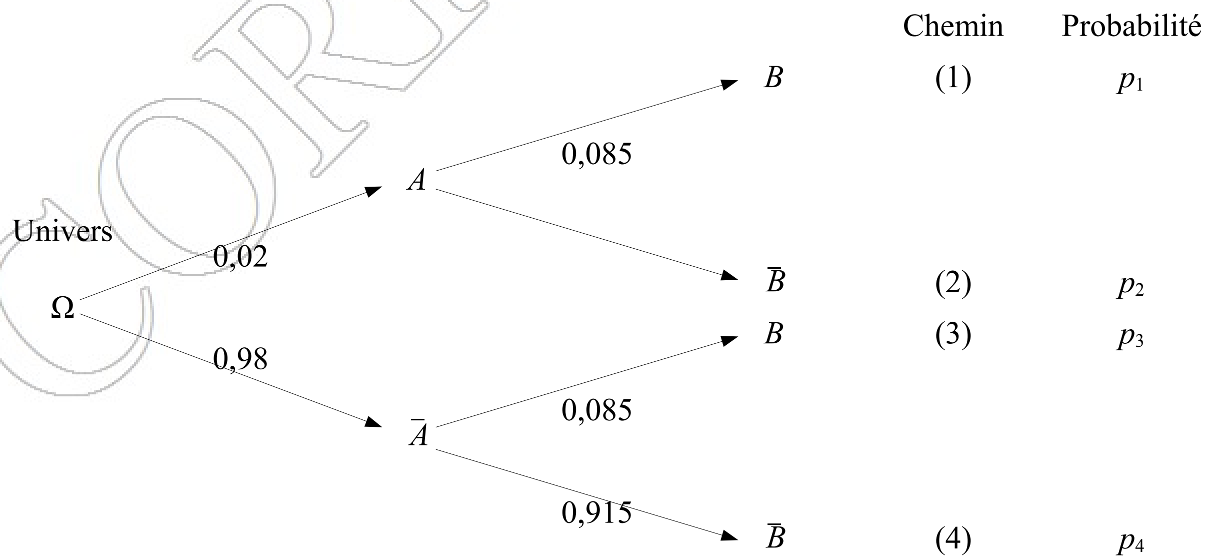
Calculer la probabilité des évènements suivants :

1. E_1 : « la ligne téléphonique de l'abonné possède les deux défauts d'éligibilité à l'ADSL ».

2. E_2 : « la ligne téléphonique de l'abonné possède au moins un des deux défauts d'éligibilité à l'ADSL ».

CORRECTION

1. Il est possible de faire un arbre de probabilité, qui est le suivant (A et B sont indépendants) :



D'après l'arbre de probabilité, on a : $\boxed{P(E_1) = P(A \cap B) = p_1 = P(A) \times P(B) = 1{,}7 \times 10^{-3} \approx 0{,}002}$

2. D'après l'arbre de probabilité, on a : $\boxed{P(E_2) = 1 - p_4 = 1 - 0{,}98 \times 0{,}915 = 0{,}1033 \approx 0{,}103}$

Partie B. Loi binomiale et loi de Poisson

Les données utilisateur sont transmises par trames de 53 octets. Dans un connexion, on prélève une trame au hasard. La connexion est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage au hasard et avec remise de 53 octets parmi l'ensemble des octets transmis lors de la connexion.

On suppose que la probabilité qu'un octet prélevé au hasard dans la connexion contienne une erreur est 0,03. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 53 octets ainsi défini, associe le nombre d'octets contenant une erreur.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun octet ne contienne une erreur.

3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus trois octets contiennent une erreur.

4. On considère que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson.
Justifier que le paramètre de cette loi de Poisson est $\lambda = 1{,}59$.

5. On désigne par Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1{,}59$.
Calculer, à l'aide la calculatrice :

a) $P\,(\,Y = 0\,)$,

b) $P\,(\,Y \leqslant 3\,)$.

CORRECTION

1. X est une variable aléatoire qui représente le nombre k d'octets contenant un erreur dans un lot de $\underline{n = 53}$ octets (k prend les valeurs entières entre 0 et 5.).

A chaque tirage ou épreuve, il y a deux issues possible :

- une issue appelée succès, ici, « l'octet contient une erreur » de probabilité $\underline{p = 0{,}03}$.
- une issue appelée échec, ici, « l'octet ne contient pas d'erreur » de probabilité $q = 0{,}97$

Comme ce prélèvement des $n = 53$ octets s'effectue sous l'hypothèse d'un tirage avec remise, chaque tirage ou épreuve, appelée épreuve de Bernouilli, se répète de manière <u>identique</u> un certains nombre de fois, ici, $n = 53$ fois.
De plus chacun des résultats des tirages sont <u>indépendants</u> les uns des autres.

Ceci est la définition mathématique d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 53$ et $p = 0{,}03$, donc :

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\,(\,n = 53, p = 0{,}03\,)}$$

2. On cherche $P\,(\,X = 0\,)$. On trouve : $\boxed{P(X=0)\approx 0{,}199}$

3. On cherche $P\,(\,0 \leqslant X \leqslant 3\,)$. On trouve : $\boxed{P(0\leqslant X\leqslant 3)\approx 0{,}926}$

4. Pour approcher une loi binomiale $\mathcal{B}\,(\,n\,,p\,)$ par une loi de poisson $\mathcal{P}\,(\,\lambda\,)$, il faut utiliser comme paramètre λ de la loi de poisson la valeur $\lambda = n \times p = 50 \times 0{,}03 = 1{,}59$.

5. En utilisant la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1{,}59$,

a) On cherche $P\,(\,Y = 0\,)$. On trouve : $\boxed{P(Y=0)\approx 0{,}204}$

b) On cherche $P\,(\,0 \leqslant Y \leqslant 3\,)$. On trouve : $\boxed{P(0\leqslant Y\leqslant 3)\approx 0{,}923}$

<u>*Remarque(s) :*</u> Les résultats entre les deux lois sont proches pour les deux calculs.

Partie C. Intervalle de confiance

Dans cette partie, on considère un stock de rouleaux de câbles de cuivre destiné à la livraison à une entreprise d'installation de lignes téléphoniques. On souhaite estimer la fréquence inconnue p des rouleaux de ce stock ayant une section inférieure à 0,4 mm.

On prélève un échantillon aléatoire de 100 rouleaux dans ce stock. Ce stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 rouleaux.

On constate que seuls 4 rouleaux de cet échantillon ont une section inférieure à 0,4 mm.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des rouleaux de ce stock ayant une section inférieure à 0,4 mm.

2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 rouleaux ainsi prélevé dans ce stock, associe la fréquence des rouleaux de cet échantillon ayant une section inférieure à 0,4 mm.

On suppose que F suit une loi normale de moyenne inconnue p et d'écart-type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$.

a) Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec un coefficient de confiance 95%.

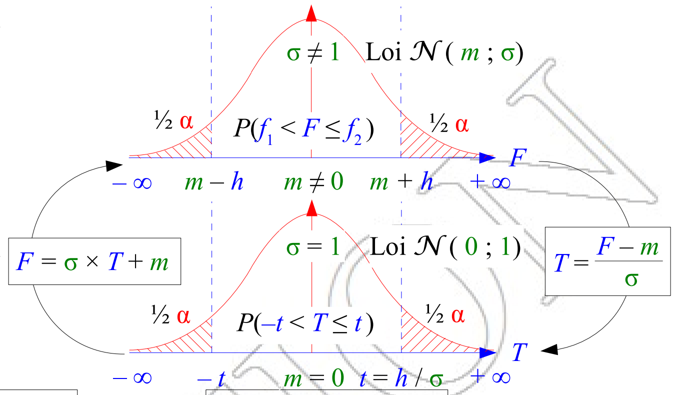
b) On considère l'affirmation suivante : « la fréquence p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question **2.a)** ».
Cette affirmation est-elle vraie ?

CORRECTION

1. Sur 100 rouleaux, 4 ont une section inférieure à 0,4 mm donc : $\boxed{p=\dfrac{4}{100}=0{,}04}$

2. On rappelle que F suit une loi normale de moyenne $m = p$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$.

a) *Méthode n°1:* Avec le formulaire et en utilisant la transformation de la loi normale $\mathcal{N}(m ; \sigma)$ vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$ (voir figure ci-contre), on cherche l'intervalle de confiance $[f_1 = m - h ; f_2 = m + h]$, centré autour de la moyenne m, au seuil de confiance de 95% donc au seuil de risque $\alpha = 0{,}05$.



Données: $\boldsymbol{m = 0{,}04, \sigma \approx 0{,}0196, \alpha = 0{,}05}$.

$t_2 = (f_2 - m) / \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_2 = t = +h / \sigma}$ et $\boxed{\Pi(t) = 1 - ½\,\alpha.}$

$t_1 = (f_1 - m) / \sigma \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = -t = -h / \sigma$ et $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.

Inconnue(s): h ou t

Calcul(s):

$P(f_1 \leqslant F \leqslant f_2) = 1 - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad P(t_1 \leqslant T \leqslant t_2) = 1 - \alpha$

$\Leftrightarrow \quad \Pi(t_2) - \Pi(t_1) = 1 - \alpha$

$\Leftrightarrow \quad \Pi(t) - \Pi(-t) = 1 - \alpha$

$\Leftrightarrow \quad \Pi(t) - (1 - \Pi(t)) = 1 - \alpha$

$\Leftrightarrow \quad 2 \times \Pi(t) - 1 = 1 - \alpha$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\Pi(t) = 1 - ½\,\alpha.}$

Remarque(s): Cette dernière formule avait déjà été obtenue à partie de la ligne données.

Application(s) numérique(s): $\Leftrightarrow \quad \Pi(t) = 0{,}975$

$\Leftrightarrow \quad t = 1{,}96$ (par lecture inverse de la table).

$\Leftrightarrow \quad h / \sigma = 1{,}96.$

$\Leftrightarrow \quad h = 1{,}96\,\sigma \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{h \approx 0{,}038}$

Un intervalle de confiance de la fréquence p au niveau de confiance de 95% est donc :

$$\boxed{[f_1 = m - h ; f_2 = m + h] \text{ soit } [0{,}002 ; 0{,}078]}$$

Méthode n°2: Avec uniquement les calculatrices (CASIO ou TI), on obtient :

Données: $\boldsymbol{m}$ **= 0,04, σ ≈ 0,0196, α = 0,05** (c'est le seuil de risque) et 1 – α = 0,95 (c'est le seuil de confiance)

CASIO GRAPH 85	**CASIO GRAPH 35+**	**TI-82 STATS**
MENU STAT + touche EXE		Touche 2nd VARS DISTR DRAW 1:normalpdf(2:normalcdf(3:invNorm(
Touche F5 (sous menu DIST) : Distribution Touche F1 (sous menu NORM) : Loi normale Touche F3 (sous menu InvN) : Lecture inverse		Choix de la troisième fonction : invNorm(+ touche EXE
On peut calculer [f_1 ; f_2] avec $P(f_1 \leqslant F \leqslant f_2) = 1 - \alpha$	On peut[1] calculer f_2 avec $P(F \leqslant f_2) = 1 - ½\,\alpha$	On peut[2] calculer f_2 avec $P(F \leqslant f_2) = 1 - ½\,\alpha$
Entrée des données + touche EXE Inverse Normal Tail :Central Area :0.95 σ :0.0196 μ :0.04 Save Res:None Execute LEFT RIGHT CNTR	Entrée des données + touche EXE Inverse Normal Tail :Left Area :0.975 σ :0.0196 μ :0.04 Save Res:None Execute LEFT RIGHT CNTR	Entrée des données Π(t), m et σ + touche EXE invNorm(0.975,0.04,0.0196) .0784152941
Inverse Normal x:Low=1.5847E-03 x:Up =0.07841529	Inverse Normal x=0.07841529 $f_2 \approx 0{,}078$ et $h = f_2 - m = 0{,}038$	$f_2 \approx 0{,}078$ et $h = f_2 - m = 0{,}038$
Résultat : [f_1 ; f_2] = [0,002 ; 0,078]	Résultat : [f_1 ; f_2] = [0,002 ; 0,078]	Résultat : [f_1 ; f_2] = [0,002 ; 0,078]

b) L'affirmation suivante : « la fréquence p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question **2.a)** » est une affirmation :

Fausse

Explication : C'est le caractère obligatoire de l'affirmation qui rend cette affirmation fausse. En effet, à chaque échantillon de 100 rouleaux, il n'y a que 95% de chance (c'est le seuil de confiance) de trouver une fréquence p de rouleaux ayant une section inférieure à 0,4 mm appartenant à l'intervalle [0,002 ; 0,078].

Un échantillon quelconque peut donc donner une fréquence p de rouleaux ayant une section inférieure à 0,4 mm qui se trouve à l'extérieur (soit à gauche, soit à droite) de l'intervalle [0,002 ; 0,078]. La probabilité est même α = 0,05 (c'est le seuil de risque).

1 On peut calculer f_1 avec $P(F \leqslant f_1) = -½\,\alpha$. Il suffit de refaire le calcul avec Area :0.025.

2 On peut calculer f_1 avec $P(F \leqslant f_1) = -½\,\alpha$. Il suffit de refaire le calcul avec invNorm(0.025,0.