Sujet d'examen

Thème:

2014_CPI: *(Sujet CPI – Session 2014)*

Table des matières

EXERCICE n°1: (3 points) QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions, une seule réponse est exacte.

Chaque réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

On ne demande aucune justification.

1. Soit M une matrice à 2 lignes et 3 colonnes, et N une matrice à 3 lignes et 2 colonnes.

Le produit $M \times N$ est une matrice à :

Réponse A : 2 lignes et 2 colonnes,

Réponse B : 3 lignes et 3 colonnes,

Réponse C : 2 lignes et 3 colonnes,

Réponse D : 3 lignes et 2 colonnes.

2. Dans un repère orthonormal de l'espace, les points A (1 ; 0 ; 2), B (–1 ; 1 ; 1) et C (2 ; 1 ; 0) sont données. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels. Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si :

Réponse A : $a = 2$ et $b = 0$,

Réponse B : $a = 1$ et $b = 1$,

Réponse C : $a = 5$ et $b = 3$.

3. Dans un repère orthonormal direct de l'espace, on donne les points A (0 ; 1 ; 1), B (0 ; 13 ; 1) et C ($3\sqrt{3}$; 4 ; 1). On rappelle que, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, le produit scalaire des deux vecteurs est donné par $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$. Une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est :

Réponse A : $\frac{\pi}{6}$ radians,

Réponse B : $\frac{\pi}{4}$ radians,

Réponse C : $\frac{\pi}{3}$ radians.

EXERCICE n°2: (7 points)

L'objet de cet exercice est l'étude de la diminution de température d'une pièce métallique, laissée à l'air libre après l'avoir chauffée.

Cette température est modélisée par une fonction f du temps t, définie pour tout t appartenant à l'intervalle $[\, 0 \,;+\infty\, [$. L'unité de $f(t)$ est le degré Celsius ($°C$) et celle de t est l'heure.

Les deux parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 3\,y = 51$, dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[\, 0 \,;+\infty\, [$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur l'intervalle $[\, 0 \,;+\infty\, [$ de l'équation différentielle

$$(E_0) : y' + 3\,y = 0.$$

2. Déterminer la fonction constante, solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Sachant qu'à l'instant initial $t = 0$, la température de la pièce métallique est égale à $220°C$, déterminer l'expression de $f(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[\, 0 \,;+\infty\, [$.

Partie B. Étude globale d'une fonction.

On considère la fonction f définie sur $[\, 0 \,;+\infty\, [$ par $f(t) = 203\, e^{-3t} + 17$.

On désigne par $\boldsymbol{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1. Limite.

a) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b) Que peut-on en déduire graphiquement pour la courbe $\boldsymbol{C}$?

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[\, 0 \,;+\infty\, [$.

3. Une demi-heure après avoir laissé la pièce à l'air libre, sa température sera-t-elle inférieure à 40 $°C$? Justifier.

4. On admet que la pièce métallique peut être tenue en main si sa température est inférieure ou égale à 38 $°C$. Au bout de combien de minutes après avoir arrêté de la chauffer est-on sûr que la pièce métallique pourra être tenue en main ? On donnera la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée à la minute près.

EXERCICE n°3: (10 points)

Penser à rendre la feuille Annexe dûment complétée.

On se propose de concevoir une nouvelle police de caractère pour la lettre « v » minuscule, tracée dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ *. La courbe formant cette lettre est la réunion de deux courbes de Bézier :* $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on se donne les points O, A, B, C, et F de coordonnées :

O (0 ; 0), A (– 5 ; 3), B (– 2 ; 4), C (– 4 ; – 5) et F (2 ; $\frac{5}{2}$). Le point E est le symétrique du point C par rapport au point O.

La courbe de Bézier $\mathcal{C}_1$ est obtenue à partir des quatre points de définition A, B, C et O **dans cet ordre.**

La courbe de Bézier $\mathcal{C}_2$ est obtenue à partir des quatre points de définition O, E, A et F **dans cet ordre.**

Partie A. Tracé de l'arc de courbe $\mathcal{C}_1$

1. Sur l'**annexe**, placer les points A, B, C et O puis les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_1$ aux points A et O.

2. Pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on note $M_1(t)$ le point de paramètre t de la courbe $\mathcal{C}_1$. Sur l'**annexe** les points M_1 (¼) et M_1 (½) sont déjà placés.

Pour chaque valeur de $t \in [\ 0\ ;\ 1\ ]$, l'algorithme de construction par barycentres successifs (appelé algorithme de De Casteljau), permet de construire le point $M_1(t)$. Utiliser cet algorithme pour construire M_1 (¾). **On laissera apparents les traits de construction.**

3. A l'aide de éléments construits, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_1$ sur l'**annexe à rendre avec la copie.**

Partie B. Étude et tracé de l'arc de courbe $\mathcal{C}_2$

Pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on note $M_2(t)$ le point de paramètre t définissant la courbe de Bézier $\mathcal{C}_2$.

On rappelle que les polynômes de Bernstein $B_{i,3}(t)$ de degré 3, pour i prenant les valeurs, 0, 1, 2 ou 3, sont définis pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 1] par : $B_{i,3}(t)=\dfrac{3!}{i!\,(3-i)!}t^i\,(1-t)^{3-i}$.

Comme l'origine du repère est un des points de définition, les points $M_2(t)$ sont donc définis par la relation vectorielle simplifiée :

$\overrightarrow{OM}_2(t)=B_{1,3}(t)\overrightarrow{OE}+B_{2,3}(t)\overrightarrow{OA}+B_{3,3}(t)\overrightarrow{OF}$, pour $t\in[\ 0\ ;\ 1\ ]$.

1. Déterminer les coordonnées du point E. Placer les points E et F sur l'**annexe à rendre avec la copie.**

2. Développer, réduire et ordonner le polynôme $B_{2,3}(t)$.

3. On admet que, pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on a :

$B_{0,3}(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$,

$B_{1,3}(t) = 3t^3 - 6t^2 + 3t$,

$B_{3,3}(t) = t^3$.

Montrer que l'abscisse x du point $M_2(t)$ de la courbe $\mathcal{C}_2$ admet pour expression :

$$x = f(t) = 29t^3 - 39t^2 + 12t, \text{ pour } t \in [\ 0\ ;\ 1\ ].$$

4. Étude de $f(t)$.

a) Calculer $f'(t)$, où f' est la dérivée de la fonction f, définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$f(t) = 29\,t^3 - 39\,t^2 + 12\,t$. On admet que la fonction f est dérivable.

b) Résoudre l'équation $f'(t) = 0$ sur l'intervalle [0 ; 1]. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près des deux solutions que l'on nommera t_1 et t_2, avec $t_1 < t_2$.

c) On admet que l'ordonnée y du point $M_2(t)$ de la courbe $\boldsymbol{C_2}$ a pour expression :

$$y = g(t) = 8{,}5\,t^3 - 21\,t^2 + 15\,t, \text{ pour } t \in [\,0\,;\,1\,].$$

On admet également que la fonction g ainsi définie est strictement croissante sur l'intervalle $[\,0\,;\,\alpha\,]$, décroissante sur l'intervalle $[\,\alpha\,;\,1\,]$, où $\alpha \approx 0{,}52$, que $f(\alpha) \approx -0{,}23$ et que $g(\alpha) \approx 3,\,32$ à 10^{-2} près.

Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions f et g sur l'intervalle [0 ; 1].

5. À l'aide du tableau des variations conjointes précédent, préciser le ou les points de la courbe $\boldsymbol{C_2}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Préciser également le ou les points de la courbe $\boldsymbol{C_2}$ où la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées.

6. Compléter le tableau de valeurs des fonctions f et g sur l'**annexe à rendre avec la copie.** Les résultats seront données à 10^{-2} près.

7. Tracer les tangentes à la courbe $\boldsymbol{C_2}$ aux points $M_2(0)$, $M_2(t_1)$, $M_2(\alpha)$, $M_2(t_2)$ et $M_2(1)$, puis tracer la courbe sur l'**annexe à rendre avec la copie.**

Partie C. Étude de la réunion des deux courbes

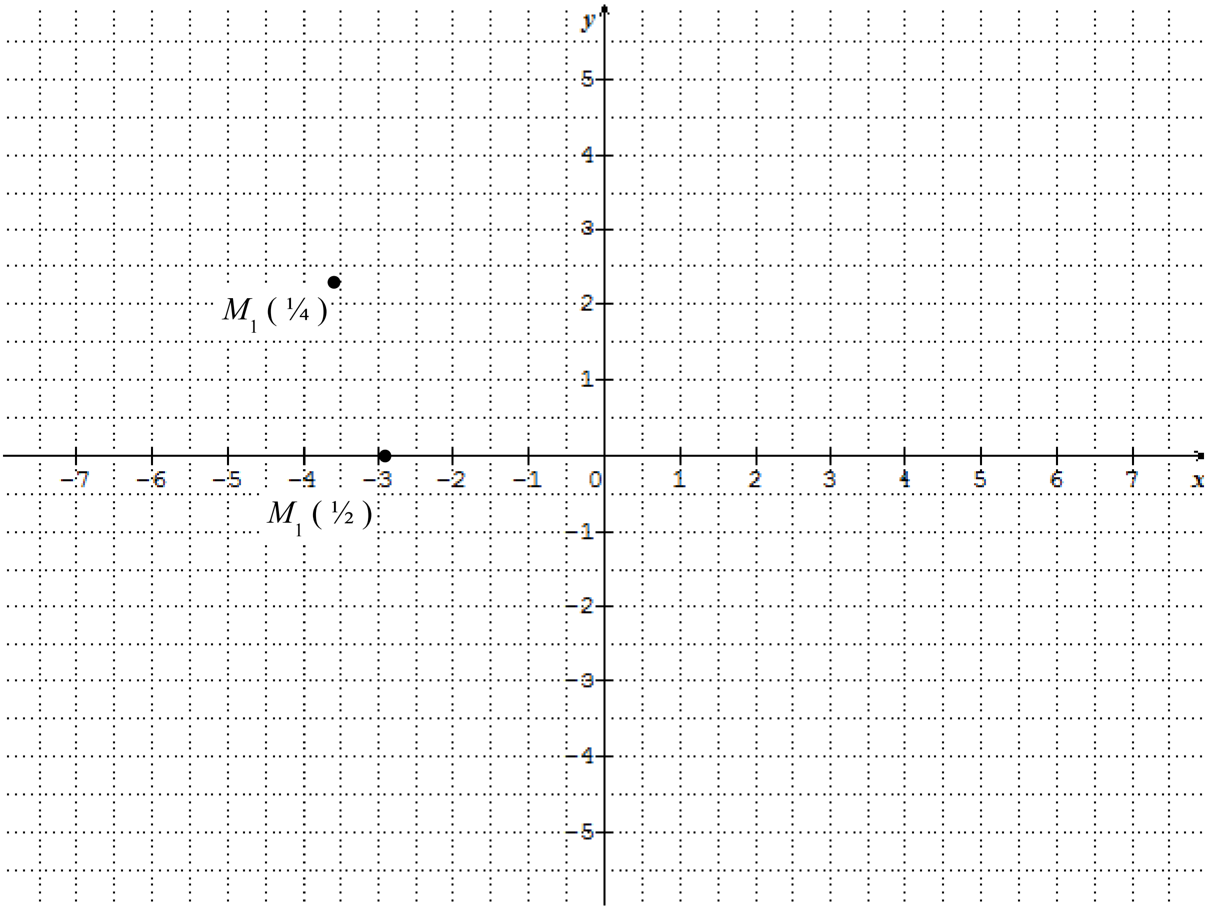
1. Les deux courbes $\boldsymbol{C_1}$ et $\boldsymbol{C_2}$ se raccordent en O. Montrer qu'elles ont même tangente en ce point.

2. Si on change les coordonnées d'un des points de définition, autre que le point O, d'une des deux courbes, les deux courbes $\boldsymbol{C_1}$ et $\boldsymbol{C_2}$ ont-elles toujours même tangente au point O ? Justifier votre réponse.

3. La boucle de la lettre « *v* » minuscule ne satisfait pas au concepteur. Pour remédier à cela, il décide de déplacer le point F en F' (2 ; 2) sans bouger les autres points de définition. Indiquer l'impact que ce déplacement a sur la taille de la boucle de « *v* » minuscule.

On ne fera aucun calcul pour répondre à cette question.

ANNEXE



t	0	0,10	0,20	0,30	0,52	0,70	0,80	0,90	1
$f(t)$	0				– 0,23				
$g(t)$	0				3,32				