

Sujet d'examen

Thème:

2013_CPI: (*Sujet CPI – Session 2013*)

Table des matières

EXERCICE n°1: (3 points).....	2
EXERCICE n°2: (7 points).....	2
Partie A. Résolution d'une équation différentielle.....	2
Partie B. Étude locale d'une fonction.....	2
EXERCICE n°3: (10 points).....	3
Partie A. Travail graphique.....	3
Partie B. Travail numérique.....	3
Partie C. Vérification.....	4
ANNEXE.....	5

EXERCICE n°1: (3 points)

Les quatre questions sont indépendantes. Pour les questions 2. et 4., toute trace de recherche, même non aboutie, sera valorisée.

1. Dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A , B et C de coordonnées respectives $A(-2; 4; 1)$, $B(3; 5; -1)$ et $C(0; 3; 4)$.

Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre G des points A , B et C .

2. Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A , B et C de coordonnées respectives $A(1; 3; 2)$, $B(0; 5; -2)$ et $C(a; 2; 2)$ où a est un nombre réel. Déterminer la valeur de a pour que le triangle ABC soit rectangle en A . On pourra utiliser le produit scalaire.

3. Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ où a est un nombre réel.

Déterminer a pour que le produit matriciel $A \times B$ soit égal à $A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$

4. Soient les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ où a , b et c sont des nombres réels.

Déterminer les valeurs de a , b et c que l'on ait l'égalité matricielle $A \times B = C$.

EXERCICE n°2: (7 points)

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y' + 5y = 10x + 3$$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0) : y'' + 4y' + 5y = 0.$$

2. Déterminer les constantes réelles a et b telles que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 4$.

Partie B. Étude locale d'une fonction.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-2x} \sin(x) + 2x - 1$.

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Développement(s) limité(s)

a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \rightarrow e^{-2x}$.

b) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par

$$x \rightarrow \sin(x) .$$

c) En déduire le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \rightarrow e^{-2x} \sin(x)$.

d) Finalement, montrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = -1 + 4x - 4x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \rightarrow 0.$$

2. Dédution(s)

a) Dédire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b) Étudier les positions relatives de C et T au voisinage du point d'abscisse 0 et illustrer cette situation par un schéma.

EXERCICE n°3: (10 points)

Soit m un réel strictement positif dont on ne connaît pas la valeur.

On considère les points $P_0 (0 ; 0)$, $P_1 (1 ; m)$ et $P_2 (3 ; 0)$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. On remarque que P_0 est égale à O , origine du repère.

On considère la courbe de Bézier définie par les points de définition P_0, P_1 et P_2 .

Soit t un réel variant de 0 à 1. On pose $B_{0,2}(t) = (1-t)^2$, $B_{1,2}(t) = 2t(1-t)$ et $B_{2,2}(t) = t^2$.

On rappelle que la courbe de Bézier définie par les trois points de définition P_0, P_1 et P_2 est décrite par le point $M(t)$ qui satisfait à l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{i=2} B_{i,2}(t) \times \overrightarrow{OP}_i.$$

Comme m est variable on a une famille de courbes de Bézier de paramètre m .

On note C_m la courbe de Bézier associée au paramètre m .

Partie A. Travail graphique

1. On prend $m = 8$. Placer les points P_0, P_1 et P_2 sur le graphique de l'[annexe page 5 à rendre avec la copie](#).
2. Quels sont les éléments géométriques que vous pouvez déjà donner pour la construction de la courbe de Bézier définie par ces trois points de contrôle ?
3. Construire graphiquement (par la méthode de barycentre ou par toute autre méthode) le point $M(\frac{1}{2})$ de cette courbe.
4. A l'aide des questions 2. et 3. tracer l'allure de C_8 , la courbe de Bézier correspondant à $m = 8$.
5. On prend maintenant $m = 1,5$. Placer, sur le même graphique, les nouveaux points P_1 et $M(\frac{1}{2})$ correspondant à cette valeur de m .
6. Tracer l'allure de $C_{1,5}$.

Partie B. Travail numérique

Soit le point $A (1 ; 2)$. On se demande s'il existe une courbe de la famille des courbes C_m qui passe par le point A .

1. Placer le point A sur le graphique. Au vu des deux courbes tracées dans la *partie A.*, que peut-on

supposer pour la valeur de m ?

2. Démontrer que les coordonnées de $M(t)$ parcourant C_m sont :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t \\ y(t) = m \times 2t(1-t) \end{cases}$$

On remarque que l'ordonnée de $M(t)$ dépend de t et de m .

3. Justifier que l'on est conduit à résoudre le système de deux équations à deux inconnues t et m suivant :

$$\begin{cases} t^2 + 2t - 1 = 0 & (1) \\ 2mt(1-t) = 2 & (2) \end{cases}$$

4. On calcule d'abord les valeurs de t possibles. Pour cela, résoudre l'équation (1) pour t variant dans $[0; 1]$. En déduire qu'il existe une unique solution t_0 dont on donnera la valeur exacte.
5. Remplacer t par t_0 dans l'équation (2). En déduire qu'il existe une seule valeur de m possible que l'on notera m_0 . En déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près.
6. Y a-t-il une courbe de la famille C_m qui passe par le point A ? Si oui, laquelle ?

Partie C. Vérification

Pour la suite de l'exercice, on choisit pour m la valeur $m_0 = 4,12$.

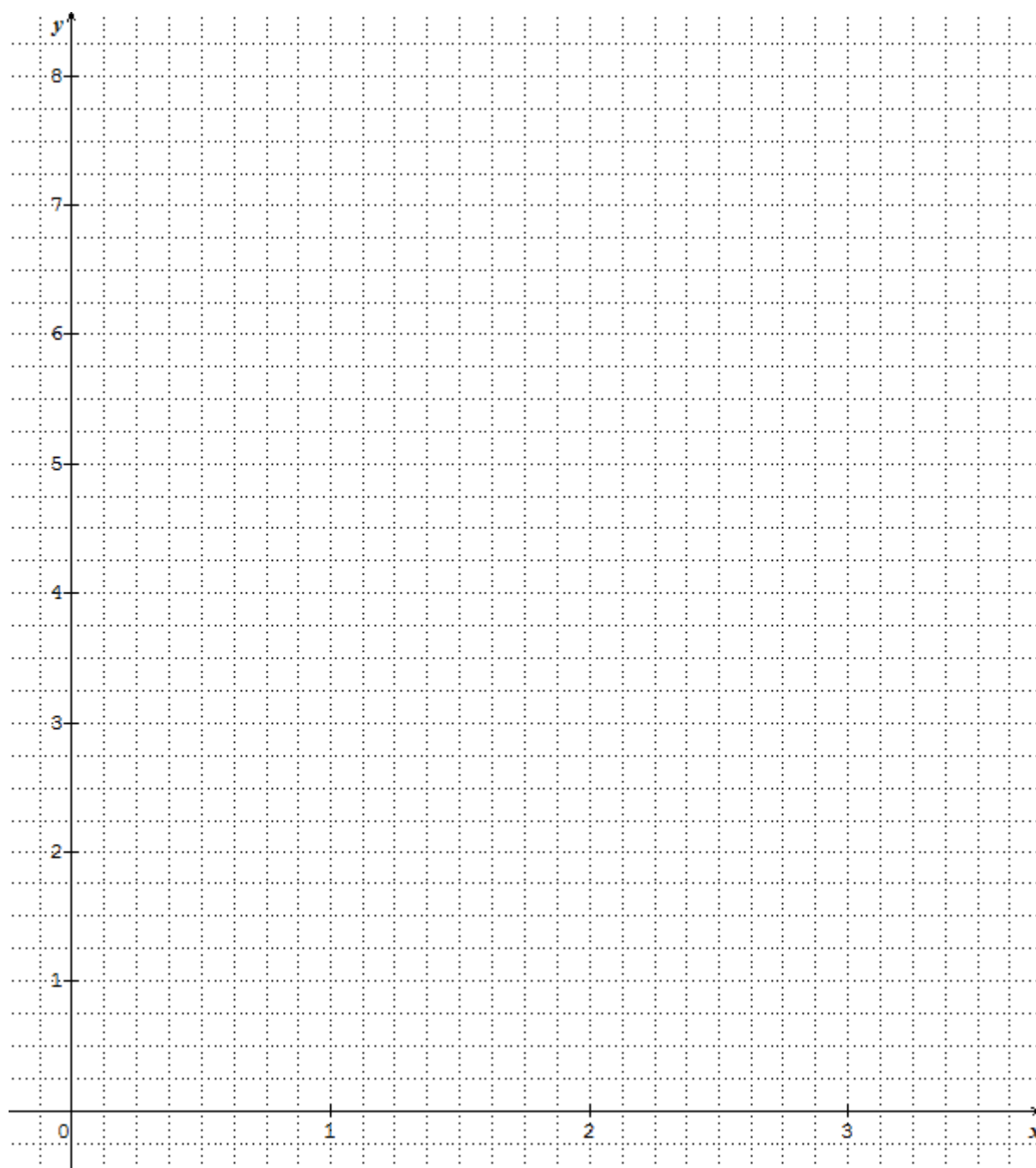
On considère la courbe $C_{4,12}$.

1. Un tableau de valeur ($t, x(t), y(t)$), établi pour la valeur $m = m_0$, est proposé en [annexe page 5](#) **à rendre avec la copie**. Compléter ce tableau à l'aide de la calculatrice. Donner les résultats arrondis à 10^{-2} .

On ne demande pas d'étudier les variations conjointes de $x(t)$ et $y(t)$.

2. Tracer $C_{4,12}$ avec soin sur le graphique de [annexe page 5](#) **à rendre avec la copie**.

ANNEXE



t	0	0,1	0,2	0,3	0,414	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$x(t)$	0		0,44			1,25					
$y(t)$	0		1,32			2,06					