Sujet d'examen

Thème:

2012_CPI: *(Sujet CPI – Session 2012)*

Table des matières

EXERCICE n°1: (9 points).....2
Partie A. Courbe de Bézier.....2
Partie B. Calcul intégral.....2
EXERCICE n°2: (3 points).....3
EXERCICE n°3: (8 points).....3
Partie A. Étude locale d'une fonction.....3
Partie B. Résolution d'une équation différentielle et étude de fonction.....4

EXERCICE n°1: (9 points)

Partie A. Courbe de Bézier

Dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les courbes de Bézier $\boldsymbol{C}_1$ définie par les 3 points de définition P_0, P_1 et P_2 avec P_0 (0 ; 0), P_1 (4 ; 4) et P_2 (8 ; 0) et $\boldsymbol{C}_2$ définie par les 3 points de définition P_3, P_4 et P_5 avec P_3 (4 ; 0), P_4 (8 ; 4) et P_5 (12 ; 0) (voir **Annexe 1**).

On rappelle que la courbe de Bézier $\boldsymbol{C}$ définie par 3 points de définition P_0, P_1 et P_2 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^{i=2} B_{i,2}(t) \times \overrightarrow{OP_i}$ avec $t \in [0;1]$ où :

$$B_{0,2}(t) = (1-t)^2 \text{ , } B_{1,2}(t) = 2t(1-t) \text{ et } B_{2,2}(t) = t^2.$$

1. Utiliser la méthode barycentrique pour construire avec soin, en laissant les traits de construction, le point $M_1\left(\frac{1}{3}\right)$, point de $\boldsymbol{C}_1$ de paramètre $t = ⅓$ sur le graphique fourni en **Annexe 1**.

2. Démontrer que, pour $t \in [\,0\,;\,1\,]$, un système d'équations paramétriques de $\boldsymbol{C}_1$ est :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 8t \\ y_1(t) &= 8t - 8t^2 \end{aligned}$$

3. Étudier les variations de x_1 et y_1 sur [0 ; 1] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

4.

a) À l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau de valeurs situé en **Annexe 1**.

b) Compléter le tracé de $\boldsymbol{C}_1$ sur le graphique fourni en **Annexe 1**.

Pour la suite de l'exercice, on admet que pour $t \in [\,0\,;\,1\,]$, un système d'équations paramétriques de $\boldsymbol{C}_2$ est :

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 4 + 8t \\ y_2(t) &= 8t - 8t^2 \end{aligned}$$

On note I le point d'intersection de $\boldsymbol{C}_1$ et $\boldsymbol{C}_2$, de coordonnées $\left(6;\frac{3}{2}\right)$.

5.

a) Placer le point I sur le graphique. Déterminer par le calcul le paramètre correspondant à I sur $\boldsymbol{C}_1$.

b) On considère maintenant $\boldsymbol{C}_2$. Déterminer par le calcul le paramètre correspondant à I sur $\boldsymbol{C}_2$.

Partie B. Calcul intégral

On considère la courbe de la *Partie A.* dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x_1(t) = 8t \\ y_1(t) = 8t - 8t^2 \end{cases}$ pour t appartenant à [0 ; 1].

1.

a) Montrer que : $y_1(t) = x_1(t) - ⅛\,(x_1(t))^2$.

b) L'arc $\boldsymbol{C}_1$ est-il un arc de parabole ? Justifier

2. On pose $f(x) = x - ⅛\,x^2$.

a) Soit $J = \int_6^8 f(x)\ dx$. Calculer la valeur exacte de J.

b) Interpréter J à l'aide de l'aire d'une partie de plan à préciser.

c) En déduire, en cm², l'aire du domaine hachuré sur l'**Annexe 1** (On pourra utiliser la symétrie de $\boldsymbol{C}_1$ et $\boldsymbol{C}_2$ par rapport à la droite d'équation $x = 6$).

EXERCICE n°2: (3 points)

Un mobile M a pour trajectoire, entre les instants $t = 0$ et $t = 1$, un arc $\boldsymbol{C}$ dont une représentation paramétrique dans un repère orthonormal est $\begin{cases} x(t)=8t \\ y(t)=8t-8t^2 \end{cases}$.

On note $\overrightarrow{V(t)}$ le vecteur vitesse de M à l'instant t, c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ de coordonnées ($x'(t)$; $y'(t)$) où x' et y' sont les fonctions dérivées de x et de y sur l'intervalle [0 ; 1].

1.

a) Justifier que $\overrightarrow{V(t)}\begin{pmatrix} 8 \\ 8-16t \end{pmatrix}$

b) Montrer que $\left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|^2 = 128 \times (2\,t^2 - 2\,t + 1)$

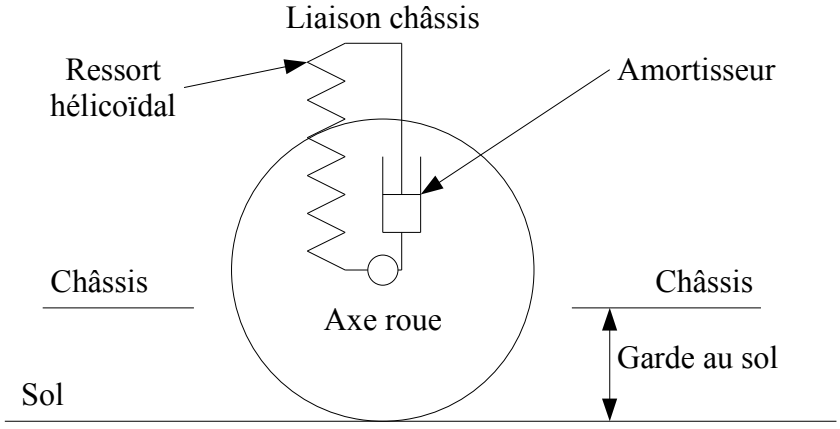
2. On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(t) = 128 \times (2\,t^2 - 2\,t + 1)$.
Établir son tableau de variation.

3. Déterminer le minimum de f sur [0 ; 1] et la valeur de t correspondante.

4. En déduire à quel instant t la vitesse du mobile, c'est-à-dire $\left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|$, est minimale et déterminer cette vitesse minimale.

EXERCICE n°3: (8 points)

La suspension d'une automobile est assurée par des systèmes indépendants formés chacun d'un ressort hélicoïdal et d'un amortisseur à piston à huile montés entre l'arbre de roue et le châssis.



Lors d'un essai dynamique à vide, le châssis est abaissé puis libéré sans vitesse initiale.

Partie A. Étude locale d'une fonction

Sous les conditions initiales de l'essai, la hauteur du châssis par rapport au sol, appelée garde au sol, est modélisée par la fonction f de la variable t, définie sur [0 ; + ∞ [dont la courbe représentative $\boldsymbol{C}_f$ est donnée en **Annexe 2**. La distance du châssis au sol est donnée en millimètres,

le temps en secondes.

1. À l'aide du graphique, déterminer les conditions initiales $f(0)$ et $f'(0)$.

2. On admet que la fonction f, définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ s'exprime par :

$$f(t) = (-150\cos(16t) - 112{,}5\sin(16t))\,e^{-12t} + 250$$

a) Montrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \to e^{-12t}$ est :

$$e^{-12t} = 1 - 12t + 72t^2 + t^2\varepsilon(t) \text{ avec } \lim \varepsilon(t) = 0 \text{ pour } t \to 0.$$

b) On admet les développement limité d'ordre 2, au voisinage de 0, suivants :

$\sin(16t) = 16t + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim \varepsilon(t) = 0$ pour $t \to 0$.

$\cos(16t) = 1 - 128t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim \varepsilon(t) = 0$ pour $t \to 0$.

Montrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(t) = 100 + 30000t^2 + t^2\varepsilon(t) \text{ avec } \lim \varepsilon(t) = 0 \text{ pour } t \to 0.$$

c) En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative $\boldsymbol{C}_f$ au point d'abscisse 0.

d) Retrouver les conditions initiales de la question **1.**.

Partie B. Résolution d'une équation différentielle et étude de fonction

Pour le confort des passagers, on souhaite choisir un amortisseur permettant un retour à la position d'équilibre le plus bref possible sans oscillation.

On sélectionne un amortisseur dont la distance $y(t)$ du châssis par rapport au sol exprimée en millimètres, vérifie l'équation différentielle :

$$(F) : y'' + 40y' + 400y = 100\,000.$$

où y est une fonction de la variable t, définie et deux fois dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle sans second membre :

$$(F_0) : y'' + 40y' + 400y = 0.$$

2. Montrer que la fonction g définie sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ par $g(t) = 250$ est une solution de l'équation différentielle (F).

3. En déduire l''ensemble des solutions de (F).

4. Déterminer la solution h de F vérifiant les conditions initiales $h(0) = 100$ et $h'(0) = 0$.

5. On considère la fonction h définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $h(t) = (-3000t - 150)\,e^{-20t} + 250$.

a) Démontrer que pour tout réel de $[\,0\,;+\infty\,[$, $h'(t) = 60000t\,e^{-20t}$.

b) Étudier les variations de h.

6.

a) Compléter le tableau de valeurs de l'**Annexe 2** (Les valeurs seront arrondies au dixième).

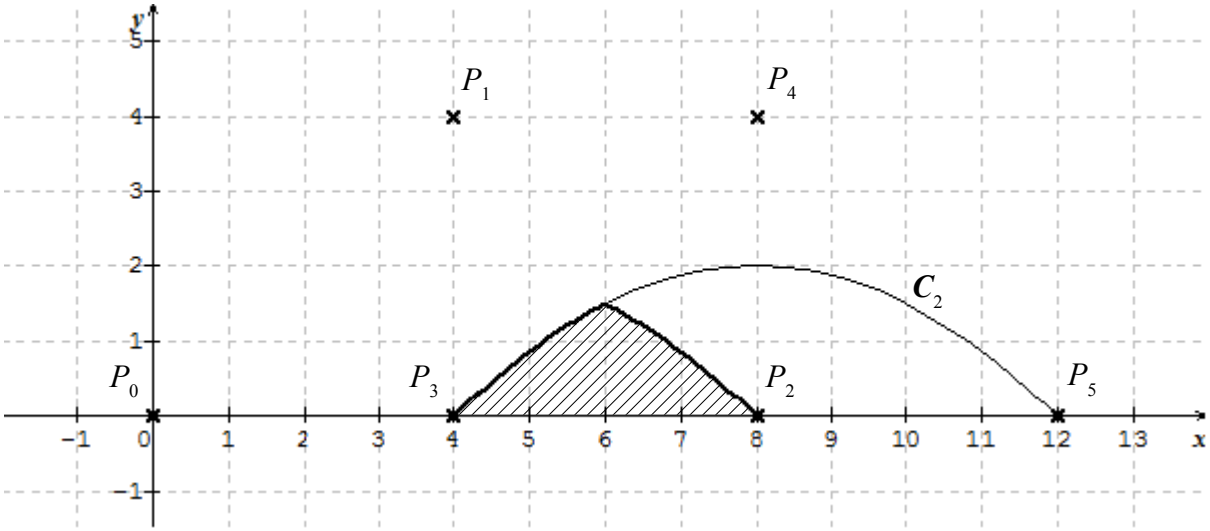
b) Construire la courbe représentative Γ de h sur le même graphique que $\boldsymbol{C}_f$ sur l'Annexe 2. L'objectif est-il atteint ?

Annexe 1

EXERCICE n°1: *Partie A.* Question **4.a)**

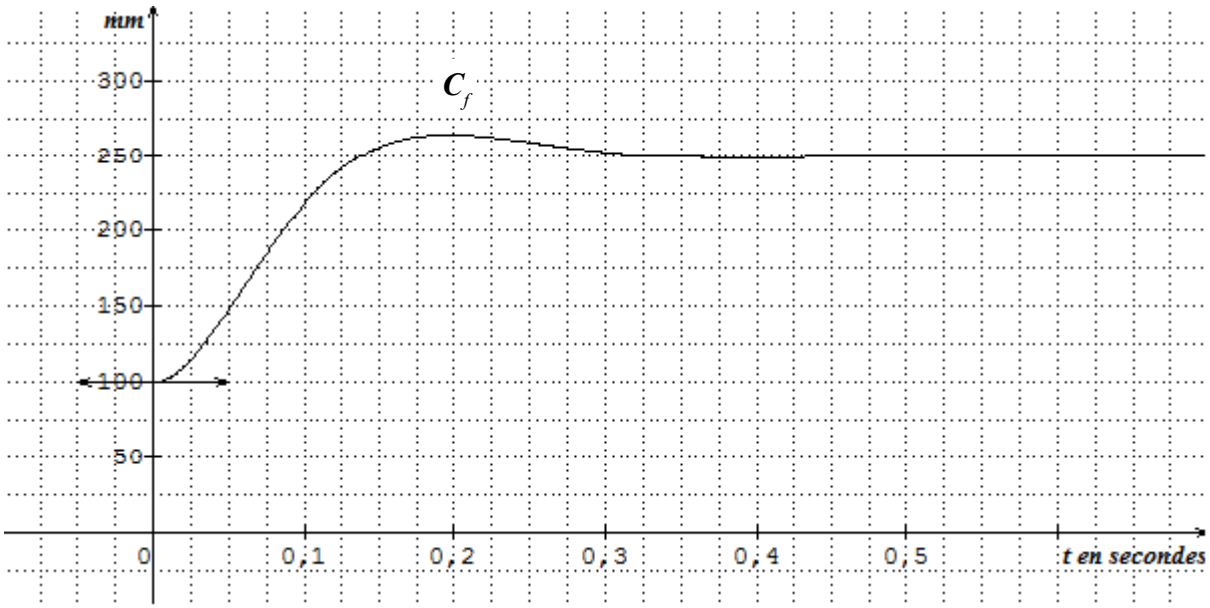
t	0	0,2	0,4	0,6	0,75	0,8	0,9	1
$x_1(t)$								
$y_1(t)$								

Figure à compléter (*Partie A* Questions **1.** et **4.b)**)



Annexe 2

EXERCICE n°3: *Partie A* : Représentation graphique de la fonction f



Partie B. Question **6.a)**

t	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,35	0,4	0,45
$h(t)$								