Sujet d'examen

Thème:

2011_CPI: *(Sujet CPI – Session 2011)*

Table des matières

EXERCICE n°1: (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions, une seule réponse A, B, C est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
On ne demande aucune justification.
Notation :
Chaque réponse rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par $\vec{u}$ (1 ; 1 ; 1) et $\vec{v}$ (1 ; 3 ; 1)

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est :	-1	5	$\vec{v}$

2. Avec les mêmes données qu'à la question précédente,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La norme du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est :	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	4

3. On donne les matrices M et N : $M = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ *et* $N = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
$M - 2\,N$ est égale à :	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Avec les mêmes données qu'à la question précédente,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit $M \times M = M^2$ est :	$\begin{pmatrix} 377 & 356 & 170 \\ 356 & 337 & 160 \\ 170 & 160 & 77 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 169 & 64 & 144 \\ 144 & 49 & 144 \\ 36 & 16 & 25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE n°2: (6 points)

Les trois parties A, B, et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2\,y' + y = 1 - \sin x$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 2\,y' + y = 0$.

2. Déterminer la constante réelle k telle que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = k \cos x + 1$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

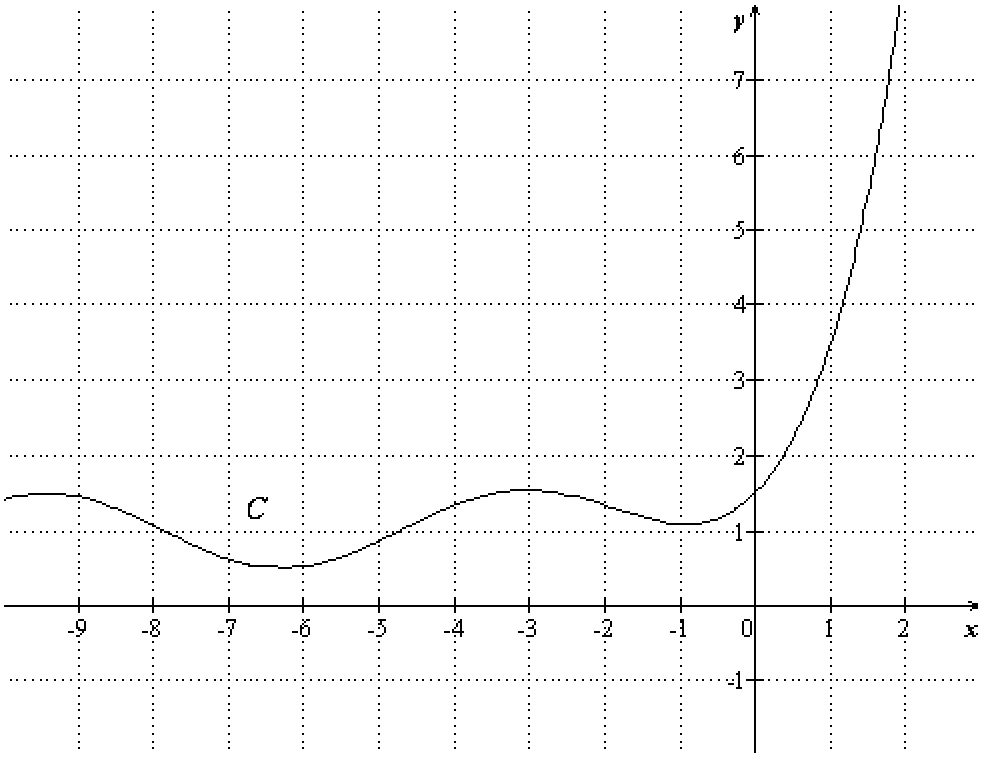
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3/2$ et $f'(0) = 1$.

Partie B. Étude locale d'une fonction.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + e^x - \frac{1}{2} \cos x$.

On a tracé ci-dessous sa courbe représentative $\boldsymbol{C}$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1. Développement limité

a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \rightarrow -\frac{1}{2} \cos x$.

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 3/2 + x + \tfrac{3}{4} x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \rightarrow 0.$$

2. Déduction

a) Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0.

b) Étudier les positions relatives de $\boldsymbol{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

EXERCICE n°3: (10 points)

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère les nombres réels $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$ et $t_4 = 4$. *On se propose de construire une courbe B-spline de degré 2 de vecteur nœud* (t_0, t_1 , t_2 , t_3 ,t_4).

Partie A. Détermination des fonctions polynômes B-splines

On rappelle que les fonctions polynômes B-splines de degré m associées au vecteur nœud (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour $m \neq 0$, par :

$$N_{i,m}(t) \;=\; \frac{t-t_i}{t_{i+m}-t_i}\times N_{i,m-1}(t) \;+\; \frac{t_{i+m+1}-t}{t_{i+m+1}-t_{i+1}}\times N_{i+1,m-1}(t)$$

1. On a déterminé des fonctions polynômes B-spline de degré 0 et 1 associées au vecteur nœud (0, 1 , 2 , 3, 4) qui ont été rassemblées dans les tableaux ci-dessous.

t	0	1	2	3	4	
$N_{0,0}(t)$	0	1	0	0	0	0
$N_{1,0}(t)$	0	0	1	0	0	0
$N_{2,0}(t)$	0	0	0	1	0	0
$N_{3,0}(t)$	0	0	0	0	1	0

t	0	1	2	3	4	
$N_{0,1}(t)$	0	t	$2-t$	0	0	0
$N_{1,1}(t)$	0	0		$3-t$	0	0
$N_{2,1}(t)$	0	0	0	$t-2$	$4-t$	0

Déterminer $N_{1,1}(t)$ pour tout t de l'intervalle [1 ; 2].

2. Le tableau suivant donne les fonctions polynômes B-splines de degré 2 associées au vecteur nœud (0, 1 , 2 , 3, 4) :

t	0	1	2	3	4	
$N_{0,2}(t)$	0	$\frac{1}{2}t^2$	$-t^2+3t-3/2$	$\frac{1}{2}t^2-3t+9/2$	0	0
$N_{1,2}(t)$	0	0	$\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}t^2-4t+8$	0

Démontrer que, pour tout t de l'intervalle [2 ; 3], $N_{1,2}(t) = -t^2 + 5t - 11/2$

Partie B. Détermination des équations paramétriques d'un des arcs de la courbe B-spline

Dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 8 centimètres, on considère les points P_0 (0 ; 1) et P_1 (2 ; 1).

La courbe B-spline associée aux points P_0 et P_1, au vecteur nœud (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) et aux polynôme B-spline de degré 2 est définie par :

$$\overrightarrow{OM(t)} \;=\; \sum_{i=0}^{i=1} N_{i,2}(t)\times\overrightarrow{OP_i}$$

Démontrer que, pour tout t de l'intervalle [1 ; 2], le point $M(t)$ a pour coordonnées :
$x(t) = t^2 - 2t + 1$ et $y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1$.

Dans ce qui suit, **on admet** que, pour tout t de l'intervalle [2 ; 3], le point $M(t)$ a pour coordonnées $x(t) = -2\,t^2 + 10\,t - 11$ et $y(t) = -\frac{1}{2}\,t^2 + 2\,t - 1$.

Partie C. Construction de la courbe B-spline

On considère l'arc $\boldsymbol{C}_1$, ensemble des points $M(t)$ de coordonnées :
$x(t) = f_1\,(t) = t^2 - 2\,t + 1$
$y(t) = g_1\,(t) = -\frac{1}{2}\,t^2 + 2\,t - 1$ où t appartient à l'intervalle [1 ; 2].

1. Étude de $\boldsymbol{C}_1$.

a) Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur [1 ; 2] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

b) Préciser des vecteurs directeurs des tangentes à $\boldsymbol{C}_1$ aux points $M(t)$ de paramètres 1 et 2.

2. On considère l'arc $\boldsymbol{C}_2$, ensemble des points $M(t)$ de coordonnées :
$x(t) = f_2\,(t) = -2\,t^2 + 10\,t - 11$
$y(t) = g_2\,(t) = -\frac{1}{2}\,t^2 + 2\,t - 1$ où t appartient à l'intervalle [2 ; 3].

On admet que le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 sur [2 ; 3] est le suivant :

t	2		5/2		3
$f_2'(t)$	2	+	0	–	– 2
$f_2(t)$	1	↗	3/2	↘	1
$g_2'(t)$	0		–		– 1
$g_2(t)$	1	↘	$\frac{7}{8}$	↘	$\frac{1}{2}$

Déterminer (par lecture du tableau ou par calcul) des vecteurs directeurs des tangentes à $\boldsymbol{C}_2$ aux points $M(t)$ de paramètres 2, 5/2 et 3.

3. On rappelle que le plan est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 8 centimètres.

a) Construire les tangentes à la courbe $\boldsymbol{C}_1$ aux points $M(1)$ et $M(2)$.

b) Construire les tangentes à la courbe $\boldsymbol{C}_2$ aux points $M(2)$, $M(5/2)$ et $M(3)$.

c) On désigne par A le point de coordonnées $A(\,0\,;\,\frac{1}{2}\,)$.
On admet que pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; 1], l'arc $\boldsymbol{C}_0$ de la courbe B-spline cherchée est le segment $[OA]$.
Construire sur le même graphique les arcs de courbe $\boldsymbol{C}_0$, $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$.