Sujet d'examen

Thème:

2010_CPI: *(Sujet CPI – Session 2010)*

Table des matières

EXERCICE n°1: (10 points)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle

$$(E) : 2\,y'' + 2\,y' + y = (\,5\,x^2 + 22\,x + 31\,)\,\mathrm{e}^x$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0) : 2\,y'' + 2\,y' + y = 0$.

2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (\,x^2 + 2\,x + 3\,)\,\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3$ et $f'(0) = 5$.

Partie B. Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\,x^2 + 2\,x + 3\,)\,\mathrm{e}^x$.

On désigne par $\boldsymbol{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = (\,x^2 + 4\,x + 5\,)\,\mathrm{e}^x.$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

3. Limites

a) Déterminer la limite de $f(x)$ de lorsque x tend vers plus l'infini.

b) Déterminer la limite de $f(x)$ de lorsque x tend vers moins l'infini.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\boldsymbol{C}$?

4. Établir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

5. Développement limité

a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

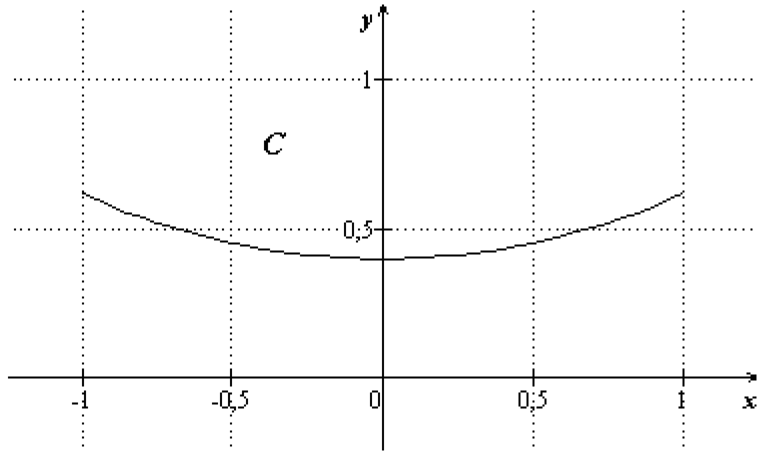
$$f(x) = 3 + 5\,x + 9/2\,x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\boldsymbol{C}$ au point d'abscisse 0.

c) Étudier la position relative de $\boldsymbol{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

EXERCICE n°2: (3 points)

La courbe ***C*** ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthogonal, de la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par $f(x) = 1/5 \times (e^{x} + e^{-x})$.



On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe ***C*** autour de l'axe des abscisses.

On désigne par V le volume, en unités de volume, de ce solide.

On admet que $V = \int_{-1}^{1} \pi \times [f(x)]^2 \, dx$.

1. Vérifier que : $V = \int_{-1}^{1} \pi/25 \times (2 + e^{2x} + e^{-2x}) \, dx$.

2. Démontrer que : $V = \pi/25 \times (4 + e^{2} - e^{-2})$.

3. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V.

Le solide obtenu ci-dessus est le modèle d'un élément de mobilier urbain.

EXERCICE n°3: (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 4 centimètres.

On souhaite construire la courbe de Bézier ***C*** définie par les points de définition suivants donnés par leurs coordonnées :

$$A_0\ (0 ; 0) ; A_1\ (0 ; 2) ; A_2\ (3 ; 3/4)$$

On rappelle que la courbe de Bézier définie par les points de définition A_i ($0 \leq i \leq n$) est l'ensemble des points $M(t)$ tels que, pour tout t de l'intervalle [0 ; 1] :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^{i=n} B_{i,n}(t) \times \overrightarrow{OA_i} \quad \text{où} \quad B_{i,n}(t) = C_n^i\ t^i\ (1-t)^{n-i}$$

1. Développer, réduire et ordonner les polynômes $B_{i,2}(t)$ avec $0 \leq i \leq 2$.

2. On note ($f(t)$; $g(t)$) les coordonnées du point $M(t)$ de la courbe ***C***.
Démonter qu'un système d'équations paramétriques de la courbe ***C*** est :
$x(t) = f(t) = 3\ t^2$
$y(t) = g(t) = -\ 13/4\ t^2 + 4\ t$ où t appartient à l'intervalle [0 ; 1].

3. Étudier les variations de f et g sur [0 ; 1] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

4. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe ***C*** :

a) au point A_0,

b) au point A_2,

c) au point M (8/13).

5. La figure est à réaliser sur une feuille de papier millimétré.
Construire les tangentes définies au **4.** et la courbe ***C***. Que constate-t-on ?