

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

"CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS"

SESSION 2010

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Coefficient : 2

**La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction
interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

**L'usage des instruments de calcul et du formulaire
de mathématiques est autorisé.**

Une feuille de papier millimétré est fournie.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Le sujet comprend 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Il comprend 2 pages numérotées de 1 et 2.

EXERCICE 1 (10 points)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : 2y'' + 2y' + y = (5x^2 + 22x + 31)e^x$$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbf{R} , y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0) : 2y'' + 2y' + y = 0$.

2° Montrer que la fonction g définie sur \mathbf{R} par $g(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$ est une solution particulière de l'équation (E) .

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3$ et $f'(0) = 5$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$.

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Démontrer que, pour tout x de \mathbf{R} ,

$$f'(x) = (x^2 + 4x + 5)e^x.$$

2° Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans \mathbf{R} .

3° a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

4° Établir le tableau de variation de f sur \mathbf{R} .

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2010
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 2/5

5° a) Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 3 + 5x + \frac{9}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

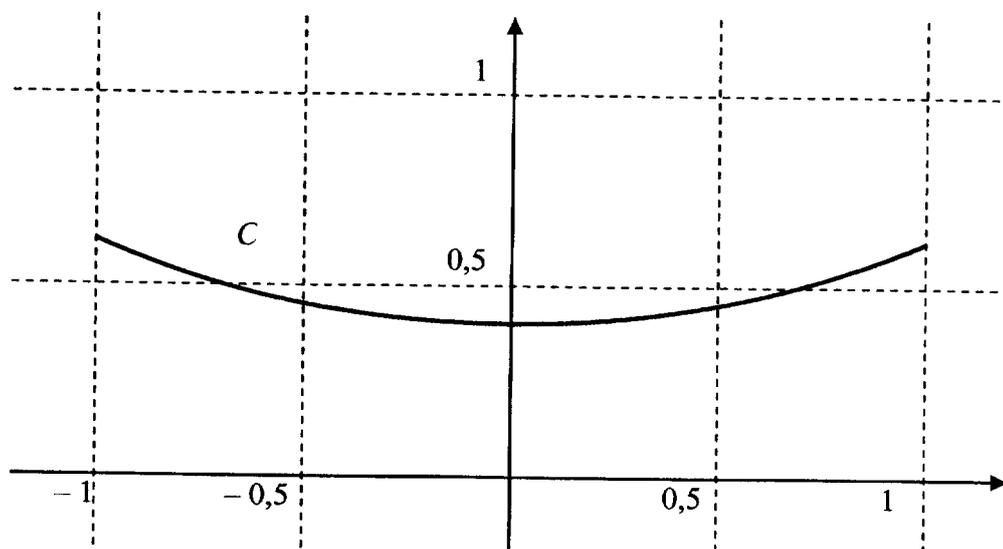
b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

c) Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2010
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 3/5

EXERCICE 2 (3 points)

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthogonal, de la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{5} (e^x + e^{-x})$.



On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe C autour de l'axe des abscisses.

On désigne par V le volume, en unités de volume, de ce solide.

On admet que $V = \int_{-1}^1 \pi [f(x)]^2 dx$.

1° Vérifier que : $V = \int_{-1}^1 \frac{\pi}{25} (2 + e^{2x} + e^{-2x}) dx$.

2° Démontrer que : $V = \frac{\pi}{25} (4 + e^2 - e^{-2})$.

3° Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V .

Le solide obtenu ci-dessus est le modèle d'un élément de mobilier urbain.

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2010
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 4/5

EXERCICE 3 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 4 centimètres.

On souhaite construire la courbe de Bézier C définie par les points de définition suivants donnés par leurs coordonnées :

$$A_0(0, 0); A_1(0, 2); A_2(3, \frac{3}{4}).$$

On rappelle que la courbe de Bézier définie par les points de définition A_i ($0 \leq i \leq n$) est l'ensemble des points $M(t)$ tels que, pour tout t de l'intervalle $[0, 1]$:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_0^n B_{i,n}(t) \overrightarrow{OA_i} \quad \text{où } B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}.$$

1° Développer, réduire et ordonner les polynômes $B_{i,2}(t)$ avec $0 \leq i \leq 2$.

2° On note $(f(t), g(t))$ les coordonnées du point $M(t)$ de la courbe C .

Démontrer qu'un système d'équations paramétriques de la courbe C est :

$$\begin{cases} x = f(t) = 3t^2 \\ y = g(t) = 4t - \frac{13}{4}t^2 \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

3° Étudier les variations de f et g sur $[0, 1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

4° Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe C :

a) au point A_0 ,

b) au point A_2 ,

c) au point $M(\frac{8}{13})$.

5° La figure est à réaliser sur une feuille de papier millimétré.

Construire les tangentes définies au 4° et la courbe C . Que constate-t-on ?

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2010
CPMAT	DUREE : 3 h	Coefficient : 2
MATHEMATIQUES		Page 5/5

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{at} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

2. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty ;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 ;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0 ; \quad \text{si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0.$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	Arc sin t	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	Arc tan t	$\frac{1}{1+t^2}$
t^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha t^{\alpha-1}$	e^{at} ($a \in \mathbb{C}$)	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + u v'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant Δ	