Sujet d'examen

Thème:

2009_CPI: (*Sujet CPI – Session 2009*)

Table des matières

EXERCICE n°1: (4 points).....	2
EXERCICE n°2: (6 points).....	2
Partie A. Résolution d'une équation différentielle.....	2
Partie B. Étude d'une fonction et réalisation d'une figure.....	3
Partie C. Détermination d'une valeur approchée d'une intégrale.....	3
EXERCICE n°3: (10 points).....	3
Partie A. Détermination d'une représentation paramétrique de l'arc de courbe C_1	3
Partie B. Étude de variations et construction de la courbe B-spline.....	4

EXERCICE n°1: (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions, une seule réponse A, B, C est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

On ne demande aucune justification. **Notation :**

Chaque réponse rapporte un point. Une réponse fautive ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On donne les matrices M et N : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La somme $M + N$ est :	$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. Avec les mêmes données qu'à la question précédente,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit $M \times N$ est :	$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 \\ 7 & -3 & 9 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ -7 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

3. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de sens direct de l'espace.

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par $\vec{u} (3 ; 1 ; -2)$ et $\vec{v} (-2 ; 2 ; -2)$

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :	Orthogonaux	Colinéaires	Ni orthogonaux ni colinéaires

4. Avec les mêmes données qu'à la question précédente,

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est :	$\vec{w} (-6 ; 2 ; 4)$	$\vec{0}$	$\vec{w} (2 ; 10 ; 8)$

EXERCICE n°2: (6 points)

Les trois parties A, B, et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + x \times y = x$, où y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et y' sa fonction dérivée.

- Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' + x \times y = 0$.
- Démontrer que la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1$, est une solution particulière de (E).
- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
- Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

Partie B. Étude d'une fonction et réalisation d'une figure

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}}$. On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 centimètres.

1. Limites

- a) Déterminer la limite de $f(x)$ de lorsque x tend vers plus l'infini et x tend vers moins l'infini.
- b) Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2. Variation

- a) Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- b) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Tracés

- a) Tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **défini au début de la partie B.**
- b) Tracer dans le même repère que la courbe C la courbe P d'équation $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$.
On ne demande pas d'étudier les variations de la fonction définie par $x \rightarrow 2 - \frac{1}{2}x^2$.
On constate que les courbes C et P sont proches l'une de l'autre sur l'intervalle $[-0,5 ; 0,5]$.

Partie C. Détermination d'une valeur approchée d'une intégrale.

Dans cette partie, on se propose de déterminer une valeur approchée de : $I = \int_{-0,5}^{0,5} f(x) dx$.

1. Développement limité

- a) En utilisant le développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par :

$$x \rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \rightarrow 0.$$

2. On note $J = \int_{-0,5}^{0,5} (2 - \frac{1}{2}x^2) dx$.

- a) Démontrer que $J = 47/24$. Donner la valeur approchée de J arrondie à 10^{-3} .
- b) Un logiciel donne $I \approx 1,960$. Vérifier que cette valeur approchée de I et la valeur approchée de J obtenue à la question a) différent de 2×10^{-3} .

EXERCICE n°3: (10 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 2 centimètres. On se propose de construire la courbe B-spline obtenue à partir de quatre points de définition P_1, P_2, P_3 et P_4 et de trois polynômes de Riesenfeld du second degré.

Les quatre points sont donnés par leurs coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$P_1(0 ; 3), P_2(1 ; -2), P_3(4 ; 3) \text{ et } P_4(-2 ; 5).$$

La courbe B-spline cherchée est la réunion de deux arcs de courbe C_1 et C_2 .

Partie A. Détermination d'une représentation paramétrique de l'arc de courbe C_1

- 1. On rappelle que les polynômes de Riesenfeld R_i de degré 2, pour i prenant les valeurs 0, 1 ou 2,

sont définis pour tout t appartenant à $[0 ; 1]$ par : $R_i(t) = 3 \times \sum_{j=0}^{j=2-i} (-1)^j \times \frac{(t+2-i-j)^2}{j!(3-j)!}$

Démontrer que, pour tout t de $[0 ; 1]$, $R_0(t) = \frac{1}{2} t^2 - t + \frac{1}{2}$.

2. L'arc de courbe C_1 est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_1(t)} = R_0(t) \times \overrightarrow{OP_1} + R_1(t) \times \overrightarrow{OP_2} + R_2(t) \times \overrightarrow{OP_3}.$$

On admet que pour tout t de $[0 ; 1]$: $R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2}$ et $R_2(t) = \frac{1}{2} t^2$.

Démontrer que l'arc de courbe C_1 est défini par la représentation paramétrique :

$$x(t) = f_1(t) = t^2 + t + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y(t) = g_1(t) = 5t^2 - 5t + \frac{1}{2} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0 ; 1].$$

Partie B. Étude de variations et construction de la courbe B-spline.

1. Étude

a) Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur $[0 ; 1]$, où f_1 et g_1 sont les fonctions définies à la question 2. de la partie A. Rassembler les résultats dans un tableau unique.

b) Donner un vecteur directeur de chacune des tangentes à l'arc de courbe C_1 aux points $M_1(0)$, $M_1(\frac{1}{2})$ et $M_1(1)$.

2. L'arc de courbe C_2 est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2(t)} = R_0(t) \times \overrightarrow{OP_2} + R_1(t) \times \overrightarrow{OP_3} + R_2(t) \times \overrightarrow{OP_4}.$$

On admet que l'arc de courbe C_2 est défini par la représentation paramétrique :

$$x(t) = f_2(t) = -\frac{9}{2} t^2 + 3t + \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad y(t) = g_2(t) = -\frac{3}{2} t^2 + 5t + \frac{1}{2} \quad \text{où } t \in [0 ; 1].$$

Le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 sur $[0 ; 1]$ est le suivant :

t	0	$\frac{1}{3}$	1		
$f_2'(t)$	3	+	0	-	-6
$f_2(t)$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$ 3 $\searrow$		1	
$g_2'(t)$	5	+	2		
$g_2(t)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$ 2 $\searrow$		4	

Donner un vecteur directeur de chacun des tangentes à l'arc de courbe C_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{3})$ et $M_2(1)$.

3. On rappelle que le plan est muni d'un repère orthonormal où l'unité graphique est 2 centimètres.

a) Construire sur une feuille de papier millimétré, les tangentes à l'arc de courbe C_1 aux points $M_1(0)$, $M_1(\frac{1}{2})$ et $M_1(1)$ puis l'arc de courbe C_1 .

b) Construire, sur le même graphique, les tangentes à l'arc de courbe C_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{3})$ et $M_2(1)$ puis l'arc de courbe C_2 .

c) Placer les points de définition sur la figure.

4. Étude d'un point particulier.

a) Donner les coordonnées du point I où se raccordent les arcs de courbe C_1 et C_2 .

b) Montrer que la tangente commune à l'arc C_1 et à l'arc C_2 au point I est la droite $(P_2 P_3)$.