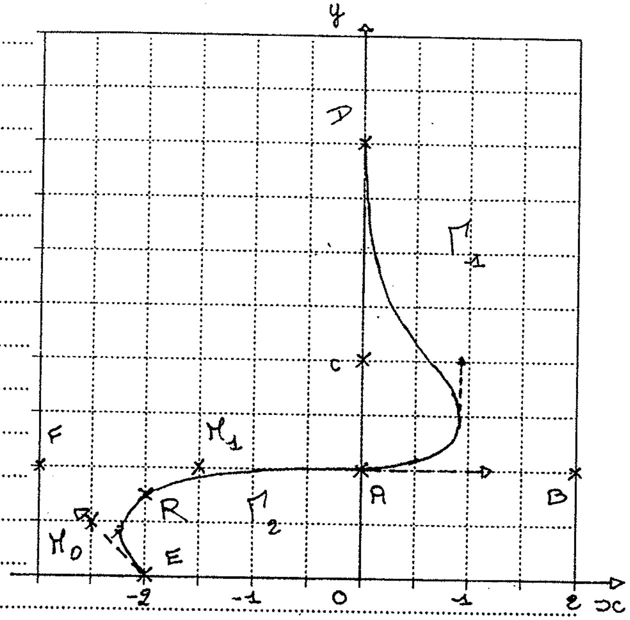
NOM:............................ PRENOM: .... Classe: ☐ BAC – ☐ BTS – Section:................



t	0		$\frac{1}{3}$		1	Variable
$f_1'(t)$	6	$+$	0	$-$	0	vitesse
x ou f_1	0	↗	$\frac{8}{9}$	↘	0	Variation
$g_1'(t)$	0	$+$	2	$+$	6	vitesse
y ou g_1	1	↗	$\frac{4}{3}$	↗	4	Variation

M. Basnary Stéphane Matière: ☐ Maths – ☐ Physique – Chapitre : .... – Date: .... Page n°..../.....

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

"CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS"

SESSION 2008

***

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.

Une feuille de papier millimétré est fournie.

Le sujet comprend 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

EXERCICE 1 (6 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = (-4x - 6)\,e^{-x}$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur **R** et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions sur **R** de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' - y = 0.$$

2° Soit g la fonction définie sur **R** par $g(x) = (x^2 + 4x)\,e^{-x}$.
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$.

A.) Résolution d'une équation différentielle

1) (E_0) $y'' - y = 0$ variable x, fonction $y(x)$

équation caractéristique $r^2 - 1 = 0 \iff r^2 = 1 \iff \boxed{r = \pm 1}$

Solution $y_0(x)$ de (E_0) $\boxed{y_0(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x}}$

2) $y_p(x) = g(x) = (x^2 + 4x) \times e^{-x} = U(x) \times V(x)$

$y_p'(x) = U'V + UV' = (2x+4)e^{-x} + (x^2+4x)\times(-e^{-x}) = \underbrace{(-x^2 - 2x + 4)}_{U(x)}\underbrace{e^{-x}}_{V(x)}$

$y_p''(x) = (-2x-2)e^{-x} + (-x^2 - 2x + 4)\times(-e^{-x}) = (x^2 - 6)\,e^{-x}$

Méthode par vérification

Dans (E) $y_p'' - y_p = (x^2 - 6)e^{-x} - (x^2 + 4x)e^{-x} = (-4x - 6)e^{-x}$
$= 2^{nd}$ membre de (E)

$g(x)$ est bien solution particulière de (E)

3) $\boxed{y_g(x) = y_0(x) + y_p(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x} + (x^2 + 4x)\,e^{-x}}$

4) $y_g'(x) = y_0'(x) + y_p'(x) = \lambda e^{x} - \mu e^{-x} + (-x^2 - 2x + 4)\,e^{-x}$

Remarque : $y_p'(x)$ a déjà été calculé à la question 2)
Les conditions initiales permettent d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ \lambda - \mu + 4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \quad (1) \\ \lambda - \mu = -3 \quad (2) \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 3 \end{cases}} \quad (1)+(2)$$

La solution f s'écrit $\boxed{f(x) = 3e^{-x} + (x^2 + 4x)\,e^{-x}}$

Remarque : ce résultat est cohérent avec la suite de l'énoncé.

B) étude locale d'une fonction :

1) a) d'après le formulaire

terme général du DL

ordre du DL

$$e^t = \underbrace{1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \boxed{\frac{t^n}{n!}}}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{t^n \times \varepsilon(t)}_{\text{terme complémentaire}} \quad \text{avec} \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$$

et l'ordre 2 on obtient :

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + t^2 \times \varepsilon(t)$$

Rappels : les opérations ne portent que sur les parties régulières des DL

Pour e^{-x} on obtient :

$$\boxed{e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \times \varepsilon(x)}$$

b) **Rappel** : on ne conserve que les termes de degré inférieur à l'ordre indiqué.

$$f(x) = (x^2 + 4x + 3) \times e^{-x}$$
$$= (x^2 + 4x + 3) \times \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \times \varepsilon(x)\right)$$
$$= x^2 + 4x - 4x^2 + 3 - 3x + \frac{3}{2}x^2 + x^2 \times \varepsilon(x)$$

$$\boxed{f(x) = 3 + x + \left(\frac{3}{2} - 3\right)x^2 + x^2 \times \varepsilon(x) = 3 + x - \frac{3}{2}x^2 + x^2 \times \varepsilon(x)}$$

2) a) **Rappel** : l'équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est le terme $ax + b$ du développement limité.

ici $\boxed{T : y = 3 + x}$

b)

x	$-$	0	$+$
$-\frac{3}{2}x^2$	$-$	0	$-$
Posit° de C / T	C au dessous		C au dessous

Remarque : on peut tracer graphiquement C et T et vérifier leurs positions relatives au voisinage du point $(0 ; 3)$

EXERCICE 1 (6 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (x^2 + 4x + 3)\,e^{-x}$.

1° a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto e^{-x}$.

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 3 + x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2° On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

a) Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b) Étudier les positions relatives de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

A) Etudes des variations d'une fonction :

1) Les coordonnées des points A et B permettent d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} f(0)=-2 \\ f(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ (2a-2)\times e^{-2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ 2a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=-2 \\ a=1 \end{cases}}$$

2) $f(x)=(x-2)\times e^{-x} = U(x)\times V(x)$

a) $f'(x) = U'V+UV' = 1\times e^{-x} + (x-2)\times(-e^{-x}) = \boxed{(-x+3)\times e^{-x}}$

b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow (-x+3)\times e^{-x}=0 \Leftrightarrow (-x+3)=0 \Leftrightarrow x=3$

De même comme $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x}>0$ on a

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow (-x+3)\geq 0 \Leftrightarrow -x\geq -3 \Leftrightarrow x\leq 3$

$f'(x)\leq 0 \Leftrightarrow (-x+3)\leq 0 \Leftrightarrow -x\leq -3 \Leftrightarrow x\geq 3$

avec $f(3)=(3-2)\,e^{-3}=e^{-3}$.

Les coordonnées de l'extremum E de f sont $E(3; e^{-3})$

c)

Points		A		B		E		
x	$-\infty$	0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$	+	3	+	e^{-2}	+	0	−	
f	↗	−2	↗	0	↗	e^{-3}	↘	

Remarques : En ce qui concerne les limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^{+}$

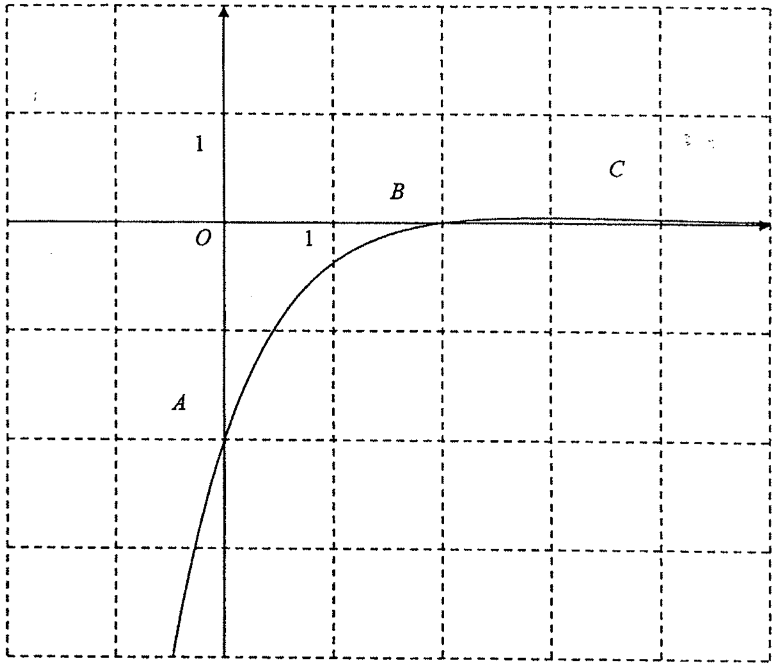
On obtient une F.I pour la 2nde limite, qui indique une asymptote horizontale.

EXERCICE 2 (5 points)

A. Étude des variations d'une fonction

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (ax + b)\,e^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels.

La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal où **l'unité graphique est 2 cm** est donnée ci-dessous.



1° La courbe C passe par les points A et B de coordonnées respectives $(0, -2)$ et $(2, 0)$. Déterminer les nombres réels a et b.

***Dans la suite de cet exercice, on admet que la fonction f est définie sur* R *par* $f(x) = (x-2)\,e^{-x}$.**

2° a) Démontrer que, pour tout x de **R**, $f'(x) = (3-x)\,e^{-x}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur **R**.

c) Établir le tableau de variation de f.

Dans ce tableau, on ne demande pas de faire figurer les limites.

B> Calcul intégral :

1> $I=\int_0^2 (x-2)\times e^{-x}\,dx = \int_0^2 U(x)\times V'(x)\,dx$

* identification U et V' et recherche de U' et V

$U(x)=x-2 \qquad U'(x)=1$

$V(x)=-e^{-x} \qquad V'(x)=e^{-x}$

* application du formulaire

$$I=\Big[\underbrace{(x-2)}_{U}\times\underbrace{(-e^{-x})}_{V}\Big]_0^2 - \int_0^2 \underbrace{1}_{U'}\times \underbrace{(-e^{-x})}_{V}\,dx$$

* recherche de la primitive du 2nd terme

$$I=\Big[(-x+2)\times e^{-x}\Big]_0^2 - \Big[e^{-x}\Big]_0^2$$

* regroupement des primitives et simplification

$$I=\Big[(-x+2)\times e^{-x} - e^{-x}\Big]_0^2 = \Big[(-x+1)\,e^{-x}\Big]_0^2 = \Big[F(x)\Big]_0^2$$

* calcul de F(b), F(a) puis I

$F(2)=-1\,e^{-2}=-e^{-2}$ $\quad F(0)=1$ donc $\boxed{I=-e^{-2}-1}$

2> a) Rappel : une intégrale $I=\int_a^b f(x)\,dx$ est un nombre exprimé en unités d'aire. Il donne une information sur l'aire du domaine délimité par les droites verticales $x=a$ et $x=b$, l'axe des abscisses (Ox) et la courbe C.
Il faut tenir compte de l'échelle pour donner l'aire en cm²

ici 1 u.a = 4 cm² et $f<0$ donc $\boxed{S=-4I=4(1+e^{-2})}$

b> $\boxed{S\simeq 4{,}54 \text{ cm}^2}$

B. Calcul intégral

On note $I=\int_0^2 f(x)\,dx$.

1° À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I=-1-e^{-2}$.

2° a) En déduire la valeur exacte de l'aire S en cm² de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées et la courbe C entre les points A et B d'abscisses respectives 0 et 2.

b) Donner la valeur approchée de S arrondie à 10^{-2}.

Ex : Courbes paramétrées :

A> 1> d'après la formule de $B_{i,m}(t)$

$$\boxed{B_{1;3}(t) = C_3^1 \times t^1 \times (1-t)^2 = 3 \times t \times (1 - 2t + t^2) = 3t - 6t^2 + 3t^3}$$

2> deux méthodes : développement linéaire.

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B_{0;3}(t) \times \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + B_{1;3}(t) \times \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + B_{3;3}(t) \times \overrightarrow{OD}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

on en déduit le système d'équations.

$$\begin{cases} x(t) = B_{0;3}(t) \times 0 + B_{1;3}(t) \times 2 + B_{2;3}(t) \times 0 + B_{3;3}(t) \times 0 \\ y(t) = \quad '' \quad \times 1 + \quad '' \quad \times 1 + \quad '' \quad \times 2 + \quad '' \quad \times 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = 2B_{1;3}(t) \\ y(t) = (1 - 3t + 3t^2 - t^3) + (3t - 6t^2 + 3t^3) + 2 \times (3t^2 - 3t^3) + 4 \times t^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = 6t - 12t^2 + 6t^3 \\ y(t) = 1 + 0t + 3t^2 + 0t^3 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x(t) = 6t - 12t^2 + 6t^3 \\ y(t) = 1 + 3t^2 \end{cases}}$$

2ième méthode : produit ligne par colonne.

$$\begin{array}{lllll} B_{0;3}(t) = & 1 & -3t & +3t^2 & -t^3 \\ B_{1;3}(t) = & 0 & 3t & -6t^2 & +3t^3 \\ B_{2;3}(t) = & 0 & 0 & 3t^2 & -3t^3 \\ B_{3;3}(t) = & 0 & 0 & 0 & 1t^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & A & B & C & D \\ x & 0 & 2 & 0 & 0 \\ y & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} x(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 \\ y(t) = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 \end{array}$$

avec $x_3 = 0 \times (-1) + 2 \times (3) + 0 \times (-3) + 0 \times (1) = 6$

$y_3 = 1 \times (-1) + 1 \times (3) + 2 \times (-3) + 4 \times (1) = 0$

On en déduit le même système d'équation.

EXERCICE 3 (9 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 2 centimètres.
On appelle courbe de Bézier définie par les points de définition A_i $(0 \le i \le n)$ l'ensemble des points $M(t)$ tels que : $\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\,\overrightarrow{OA_i}$ où $B_{i,n}(t) = C_n^i\, t^i (1-t)^{n-i}$.

A. Construction d'une courbe de Bézier C_1

Dans cette question, on s'intéresse à la courbe de Bézier C_1 définie par les quatre points de définition A(0, 1) ; $B(2, 1)$; $C(0, 2)$; $D(0, 4)$, dans cet ordre.

1° Démontrer que, pour tout t de [0, 1], $B_{1,3}(t) = 3t - 6t^2 + 3t^3$.

2° On admet que, pour tout t de [0, 1] :
$B_{0,3}(t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$; $B_{2,3}(t) = 3t^2 - 3t^3$ et $B_{3,3}(t) = t^3$.
En déduire qu'un système d'équations paramétriques de la courbe C_1 est :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = 6t - 12t^2 + 6t^3 \\ y = g_1(t) = 1 + 3t^2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

3° Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur [0, 1] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

4° Préciser les coordonnées des points de la courbe C_1 où les tangentes sont parallèles aux axes de coordonnées.

5° Montrer que la droite (AB) est tangente à la courbe C_1 au point A.

6° Tracer la tangente (AB) et la courbe C_1 dans le repère donné au début de l'énoncé.

3.> $f_1(t) = 6t - 12t^2 + 6t^3$ | $g_1(t) = 1 + 3t^2$

$f_1'(t) = 6 - 24t + 18t^2$
$= 6 \times (3t^2 - 4t + 1)$

$g_1'(t) = 6t$

$f_1'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0$
$\Leftrightarrow \Delta = 16 - 12 = 4$

$\Leftrightarrow \boxed{t_1 = \frac{4+2}{6} = 1}$

et $\boxed{t_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}}$

$g_1'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$
pour $t = 0$ $g_1(0) = 1$

Sinon
$\forall t \in [0;1]$ $g_1'(t) \geq 0$
donc g_1 est croissante.

Pour $t_2 = \frac{1}{3}$ $f_1(t) = 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{9} = \frac{18-12+2}{9} = \boxed{\frac{8}{9}}$
$t_1 = 1$ $f_1(t) = 0$

Pour $t_2 = \frac{1}{3}$ $\boxed{g_1(t) = \frac{4}{3}}$

(Voir tableau résumé)

4.> Les coordonnées des points de la courbe C_1 où les tangentes sont parallèles aux axes des coordonnées sont :
Pour $t = 0$ point $A(0;1)$ vitesse $(6;0)$ tangente horizontale
Pour $t = 1/3$ point $M_{1/3}\left(\frac{8}{9};\frac{4}{3}\right)$ vitesse $(0;2)$ tangente verticale
Pour $t = 1$ point $D(0;4)$ vitesse $(0;6)$ tangente verticale

5.> Un vecteur directeur de la tangente en C_1 au point A est $\vec{v_0}(6;0)$
Les coordonnées de $\vec{AB}$ sont $\vec{AB}(2;0)$
Les deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{v_0}$ sont colinéaires et $\vec{v_0} = 3\vec{AB}$
Les droites T_A tangente et (AB) sont parallèles.
T_A et (AB) ont en plus un point commun A.
Les deux droites sont donc confondues.

6.> Voir graphe.

B. Étude géométrique et construction d'une courbe de Bézier C_2

On considère la courbe de Bézier C_2 définie par les trois points de définition $E(-2, 0)$; $F(-3, 1)$ et $A(0, 1)$, dans cet ordre.

Les deux résultats suivants n'ont pas à être démontrés.

• Un système d'équations paramétriques de la courbe C_2 est :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = -2 - 2t + 4t^2 \\ y = g_2(t) = 2t - t^2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

• Le tableau de variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 est le suivant :

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$f_2'(t)$	-2	$-$	0	+	6
$f_2(t)$	-2	↘	$-2{,}25$	↗	0
$g_2'(t)$	2		+		0
$g_2(t)$	0		↗		1

1° Construire sur la figure de la partie A le point M_0 tel que $\overrightarrow{EM_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$, le point M_1 tel que $\overrightarrow{FM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$ et le point R tel que $\overrightarrow{M_0R} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_0M_1}$.

2° Calculer les coordonnées des points M_0, M_1 et R.

3° Montrer que le point R est le point de la courbe C_2 de paramètre $\frac{1}{2}$.

4° Montrer que la droite (AF) est tangente à la courbe C_2 au point A.

5° Montrer que les courbes C_1 et C_2 ont la même tangente au point A.

6° Tracer la courbe C_2 sur la même figure que la courbe C_1.

B> courbe de Bézier C_2

1> Voir figure.

2> $E\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ $F\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{EM_0}\begin{pmatrix}x+2\\y\end{pmatrix}$ $\vec{EF}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

on en déduit le système

$$\begin{cases} x+2 = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}\end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}\end{cases} \iff \boxed{M_0\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)}$$

Pour le point M_1

$\vec{FM_1}\begin{pmatrix}x+3\\y-1\end{pmatrix}$ $\vec{FA}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

on en déduit le système $\begin{cases} x+3 = \frac{3}{2} \\ y-1 = 0\end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 1\end{cases} \iff \boxed{M_1\left(-\frac{3}{2};1\right)}$

Pour le point R

$\vec{M_0R}\begin{pmatrix}x+\frac{5}{2}\\y-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\vec{M_0M_1}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

on en déduit le système $\begin{cases} x+\frac{5}{2} = \frac{1}{2} \\ y-\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\end{cases} \iff \begin{matrix} x = -2 \\ y = \frac{3}{4}\end{matrix} \iff \boxed{R\left(-2;\frac{3}{4}\right)}$

3> Calculons les coordonnées du point $M_{1/2}$ de C_2 pour $t = \frac{1}{2}$

$f_2(1/2) = -2 - 1 + 4\times\frac{1}{4} = -2$

$g_2(1/2) = 2\times\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = +3/4$ donc $\boxed{M_{1/2}\left(-2;\frac{3}{4}\right) = R}$

Remarque: c'est une propriété géométrique pour une courbe de bézier à 3 points de contrôle

4> Un vecteur directeur de la tangente T_A à la courbe C_2 est $\vec{v_1}(6;0)$

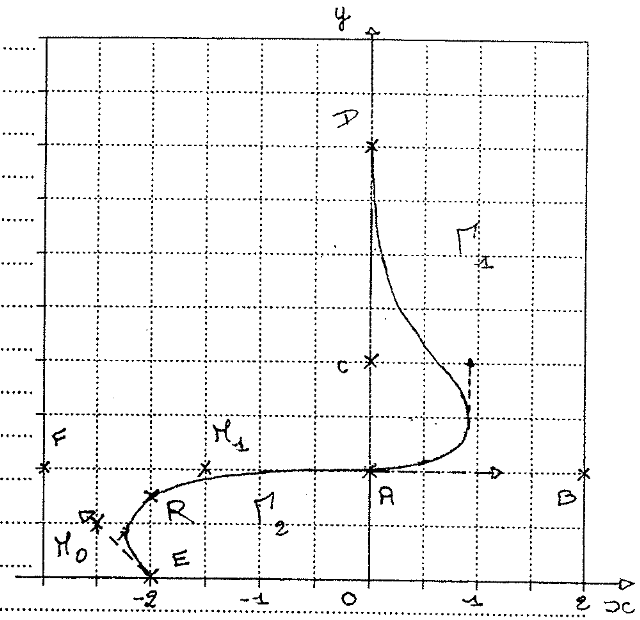
$\vec{AF}(-3;0)$ et $\vec{v_1}$ sont colinéaires. Les deux droites T_A et (AF) sont parallèles avec en plus un point commun: Elles sont donc confondues.

5> Les vecteurs directeurs des 2 tangentes sont identiques (6;0).

Les deux tangentes ont un point commun A.

Les deux tangentes sont donc confondues.

NOM:................ PRENOM: .... Classe: ☐ BAC – ☐ BTS – Section:..........



t	0		$\frac{1}{3}$		1	Variable
$f_1'(t)$	6	+	0	−	0	vitesse
x ou f_1	0	↗	$\frac{8}{9}$	↘	0	Variation
$g_1'(t)$	0	+	2	+	6	vitesse
y ou g_1	1	↗	$4/3$	↗	4	Variation