BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

"CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS"

SESSION 2008

***

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. **L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.**

Une feuille de papier millimétré est fournie.

Le sujet comprend 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

EXERCICE 1 (6 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = (-4x - 6)\,\mathrm{e}^{-x}$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur **R** et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions sur **R** de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' - y = 0.$$

2° Soit g la fonction définie sur **R** par $g(x) = (x^2 + 4x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (x^2 + 4x + 3)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1° a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 3 + x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2° On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

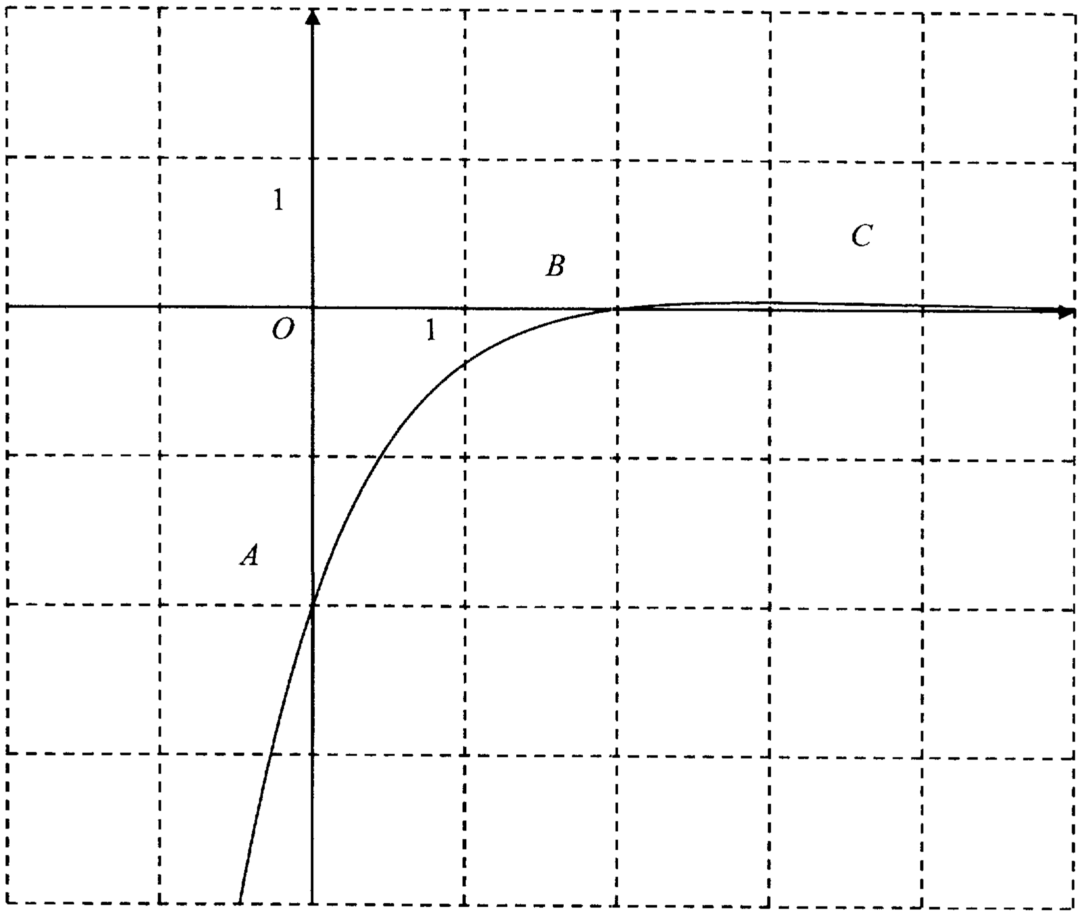
a) Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b) Étudier les positions relatives de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

EXERCICE 2 (5 points)

A. Étude des variations d'une fonction

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels.
La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal où **l'unité graphique est 2 cm** est donnée ci-dessous.



1° La courbe C passe par les points A et B de coordonnées respectives $(0, -2)$ et $(2, 0)$.
Déterminer les nombres réels a et b.

Dans la suite de cet exercice, on admet que la fonction f est définie sur* R *par
$f(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

2° a) Démontrer que, pour tout x de **R**, $f'(x) = (3-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur **R**.

c) Établir le tableau de variation de f.

Dans ce tableau, on ne demande pas de faire figurer les limites.

B. Calcul intégral

On note $I = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1° À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = -1 - \mathrm{e}^{-2}$.

2° a) En déduire la valeur exacte de l'aire S en cm^2 de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées et la courbe C entre les points A et B d'abscisses respectives 0 et 2.

b) Donner la valeur approchée de S arrondie à 10^{-2}.

EXERCICE 3 (9 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ où l'unité graphique est 2 centimètres.
On appelle courbe de Bézier définie par les points de définition A_i $(0 \leq i \leq n)$ l'ensemble des points $M(t)$ tels que : $\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\,\overrightarrow{OA_i}$ où $B_{i,n}(t) = C_n^i\, t^i (1-t)^{n-i}$.

A. Construction d'une courbe de Bézier C_1

Dans cette question, on s'intéresse à la courbe de Bézier C_1 définie par les quatre points de définition A(0, 1) ; $B(2, 1)$; $C(0, 2)$; $D(0, 4)$, dans cet ordre.

1° Démontrer que, pour tout t de $[0, 1]$, $B_{1,3}(t) = 3t - 6t^2 + 3t^3$.

2° On admet que, pour tout t de $[0, 1]$:
$B_{0,3}(t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$; $B_{2,3}(t) = 3t^2 - 3t^3$ et $B_{3,3}(t) = t^3$.
En déduire qu'un système d'équations paramétriques de la courbe C_1 est :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = 6t - 12t^2 + 6t^3 \\ y = g_1(t) = 1 + 3t^2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

3° Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur [0, 1] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

4° Préciser les coordonnées des points de la courbe C_1 où les tangentes sont parallèles aux axes de coordonnées.

5° Montrer que la droite (AB) est tangente à la courbe C_1 au point A.

6° Tracer la tangente (AB) et la courbe C_1 dans le repère donné au début de l'énoncé.

B. Étude géométrique et construction d'une courbe de Bézier C_2

On considère la courbe de Bézier C_2 définie par les trois points de définition $E(-2, 0)$; $F(-3, 1)$ et $A(0, 1)$, dans cet ordre.

Les deux résultats suivants n'ont pas à être démontrés.

- Un système d'équations paramétriques de la courbe C_2 est :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = -2 - 2t + 4t^2 \\ y = g_2(t) = 2t - t^2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

- Le tableau de variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 est le suivant :

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$f_2'(t)$	-2	$-$	0	$+$	6
$f_2(t)$	-2	$\searrow$	$-2{,}25$	$\nearrow$	0
$g_2'(t)$	2		$+$		0
$g_2(t)$	0		$\nearrow$		1

1° Construire sur la figure de la partie A le point M_0 tel que $\overrightarrow{EM_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$, le point M_1 tel que $\overrightarrow{FM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$ et le point R tel que $\overrightarrow{M_0R} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_0M_1}$.

2° Calculer les coordonnées des points M_0, M_1 et R.

3° Montrer que le point R est le point de la courbe C_2 de paramètre $\frac{1}{2}$.

4° Montrer que la droite (AF) est tangente à la courbe C_2 au point A.

5° Montrer que les courbes C_1 et C_2 ont la même tangente au point A.

6° Tracer la courbe C_2 sur la même figure que la courbe C_1.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ .... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ .... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.