

NOM:

PRENOM:

Classe: ☐ BAC – ☐ BTS – Section:

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

"CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS"

SESSION 2007

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Coefficient : 2

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction
interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et du formulaire
de mathématiques est autorisé.

Deux feuilles de papier millimétré sont fournies.

Le sujet comprend 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

Partie B:

$$y'' + 2y' + \frac{5}{4}y = 0 \quad \text{équation différentielle du 2nd ordre}$$

$$1. \quad x^2 + 2x + \frac{5}{4} = 0 \quad \text{équation caractéristique associée}$$

$$\Delta = (b)^2 - 4ac = 4 - 5 = -1 \leq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{\Delta} = i \times \sqrt{-\Delta} = i \times 1 = 1 \times i$$

Les solutions sont appelées membres complexes mais les formules restent identiques:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 0}{2} = -1 + \frac{1}{2} \times i$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 0}{2} = -1 - \frac{1}{2} \times i$$

En utilisant le formulaire, on obtient $y_0(x) = \left(\lambda \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \right) e^{-x}$

2. Le système à résoudre est $\begin{cases} f(x) = y_0(x) \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$

* La 1^{re} condition donne $\lambda \cos(0) + \mu \sin(0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

* La fonction $f(x)$ s'écrit donc

$$f(x) = \mu \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \times e^{-x}$$

$$f'(x) = \mu \times \frac{1}{2} \times \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \times e^{-x} + \mu \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \times (-1) \times e^{-x}$$

* La 2nd condition donne $\mu \times \frac{1}{2} \times \cos(0) - \mu \sin(0) = 1 \Rightarrow \mu \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \mu = 2$

* En réécrivant λ et μ dans $y_0(x)$, on obtient $f(x) = 2 \times \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \times e^{-x}$

Remarque: cette fonction est cohérente avec la suite de l'exercice.

EXERCICE 1 (6 points)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + \frac{5}{4}y = 0$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

2° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2007
CPMAT	DURÉE : 3 h	Coefficient : 2
MATHÉMATIQUES		Page 2/5

Partie B:

$$f(x) = 2x e^{-x} \sin \frac{1}{2}x$$

1° a) à l'aide du formulaire pour e^t

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + t \times \varepsilon(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t \times \varepsilon(t)$$

Pour e^{-x} on remplace t par $(-x)$, on obtient
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x \times \varepsilon(x)$$

Remarque: On fait figurer que des signes $\oplus$ dans le dernier terme.

b) on utilise le formulaire pour $\sin t$ (qui ne contient pas de termes en t^2) et on remplace t par $\frac{1}{2}x$.

$$\sin t = \frac{t}{1!} + t^3 \times \varepsilon(t) \quad \text{donc} \quad \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x + x^3 \times \varepsilon(x)$$

c) on multiplie les 2 expressions encadrées, on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à 2. Les autres termes sont englobés dans le terme $x^2 \times \varepsilon(x)$ d'où

$$e^{-x} \times \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + x^2 \varepsilon(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

on obtient alors par
$$f(x) = x - x^2 + x^2 \times \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

d) Par propriété du DL, l'équation de T est $y(x) = x$.

3° la réponse s'obtient en étudiant le signe de $-x^2$ au voisinage de x égal à 0.

signe de $-x^2$ | 0 |
Position de C et T | C au dessous de T | C au dessous de T

Remarque: On peut vérifier graphiquement les résultats à la calculatrice en traçant $f(x)$, $f(x) = x - x^2$ et T $y(x) = x$.

EXERCICE 1 (6 points)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-x} \sin \frac{1}{2}x$.

- Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.
- Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{2}x$.
- Déduire du 1° et du 2° que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :
 $f(x) = x - x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

2° Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe représentative C de f au point d'abscisse zéro.

3° Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse zéro.

Partie A:

$$f(x) = 2x e^{-\frac{1}{2}x} \times \sqrt{x}$$

$$1^\circ f(0) = 0 \text{ (à cause de } \sqrt{x}) \text{ et } f(3) = 2\sqrt{3} e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,77$$

$$2^\circ a) f(x) = \underbrace{2x e^{-\frac{1}{2}x}}_u \times \underbrace{\sqrt{x}}_v$$

$$\text{avec } u'(x) = -e^{-\frac{1}{2}x} \text{ et } v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ (voir le formulaire pour } u' \text{ et } v' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}})$$

f est de la forme $u \times v$ donc

$$f'(x) = -e^{-\frac{1}{2}x} \times \sqrt{x} + 2x e^{-\frac{1}{2}x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \left(-\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \times e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\text{En mettant au même dénominateur } f'(x) = \frac{(-x+1) \times e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}}$$

b) En déduire les variations de f sur $]0, 3]$ signifie étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0, 3]$ et dresser le tableau de variation.

$$\text{Sur }]0, 3] \sqrt{x} \neq 0 \text{ et } e^{-\frac{1}{2}x} \neq 0 \text{ donc } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (-x+1) = 0 \Leftrightarrow x=1$$

$$\text{Sur }]0, 3] \sqrt{x} > 0 \text{ et } e^{-\frac{1}{2}x} > 0 \text{ donc } f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$f \text{ possède un maximum pour } x=1 \text{ et } f(1) = 2 \times e^{-\frac{1}{2}} \approx 1,21$$

Voir le tableau de variation.

3> Voir graphique

$$\text{Remarque on trouve lim}_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

La pente de la tangente pour $x=0$ et $+\infty$, la tangente est verticale.

Pour $y=f(x)$ et $x=0$ on trouve $y=0$, la tangente est verticale passant par 0.

EXERCICE 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, 3]$ par $f(x) = 2 e^{-\frac{1}{2}x} \sqrt{x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 4 cm.

A. Étude des variations et courbe représentative

1° Calculer $f(0)$ et $f(3)$. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $f(3)$.

2° a) Démontrer que, pour tout x de $]0, 3]$, $f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x} (1-x)}{\sqrt{x}}$.

b) En déduire les variations de f sur $]0, 3]$.

3° On admet qu'à l'origine du repère la tangente à la courbe C est l'axe des ordonnées. Construire la courbe C sur une feuille de papier millimétré.

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2007
CPMAT	DURÉE : 3 h	Coefficient : 2
MATHÉMATIQUES		Page 3/5

Partie B: $f(x) = 2x e^{-\frac{1}{2}x} \sqrt{x}$ et $V = \int_0^3 \pi [f(x)]^2 dx$

V en unités d'unités de volume.

$\rightarrow f(x) = (2x e^{-\frac{1}{2}x} \sqrt{x})^2 = 4x e^{-x} \times x$ (car multiplier par soi-même)

on a bien $V = \int_0^3 \underbrace{4\pi x \times x}_{u} \times \underbrace{e^{-x}}_{v} dx$

$\Rightarrow$ on utilise la méthode exposée dans le cours.

* identification : recherche u et v $u(x) = 4\pi x$ $u'(x) = 4\pi$
 $v(x) = e^{-x}$ $v'(x) = -e^{-x}$

* application formule

$V = [4\pi x \times (-e^{-x})] - \int -4\pi e^{-x} dx$

* recherche de la 2nd primitive

$V = [-4\pi x e^{-x}] - [4\pi e^{-x}]$

* regroupement / simplification

$V = [4\pi x(-x-1) \times e^{-x}]_0^3$

Remarque: le terme entre crochets est une primitive de la fonction à intégrer.

* calcul final

$V = (4\pi \times (-4) \times e^{-3}) - (4\pi \times (-1)) = -4\pi \times 4e^{-3} + 4\pi$

on obtient finalement $V = 4\pi \times (1 - 4e^{-3})$

Remarque: la constante 4π apparaît du début jusqu'à la fin.

$\Rightarrow V \approx 10,06$ unités de volume

Remarque: Quelle est la valeur du volume en cm^3 , en mL ?

EXERCICE 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, 3]$ par $f(x) = 2 e^{-\frac{1}{2}x} \sqrt{x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 4 cm.

B. Calcul intégral

On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe C autour de l'axe des abscisses.

On désigne par V le volume en unités de volume de ce solide.

On admet que $V = \int_0^3 \pi [f(x)]^2 dx$.

1° Vérifier que $V = \int_0^3 4\pi x e^{-x} dx$.

2° A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :
 $V = 4\pi (1 - 4e^{-3})$.

3° Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V .

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS	SESSION 2007
CPMAT	DURÉE : 3 h
MATHÉMATIQUES	Coefficient : 2
	Page 3/5

Exercice 1

1° Réécris la formule de $R_i(t)$ pour $i=0$

$$R_0(t) = 3 \times \sum_{j=0}^{j=2} \frac{(-1)^j (t+2-j)^2}{j!(3-j)!}$$

Le symbole Σ contient 3 termes pour $j=0$, $j=1$ et $j=2$ donc

$$R_0(t) = 3 \times \left[\frac{(t+2)^2}{3!} + (-1) \frac{(t+1)^2}{1!2!} + (-1)^2 \frac{t^2}{2!1!} \right]$$

$$R_0(t) = 3 \times \left[\frac{1}{6} \times (t^2 + 4t + 4) - \frac{1}{2} \times (t^2 + 2t + 1) + \frac{1}{2} \times t^2 \right]$$

$$R_0(t) = 3 \times \left[\frac{1}{6} t^2 + \frac{2}{3} t + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t^2 \right]$$

$$R_0(t) = 3 \times \left[\frac{1}{6} t^2 - \frac{1}{3} t + \frac{1}{6} \right] \quad \text{donc} \quad \boxed{R_0(t) = \frac{1}{2} t^2 - t + \frac{1}{2}}$$

2° Il faut présenter les vecteurs sous forme de colonnes pour obtenir le résultat

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} t^2 - t + \frac{1}{2} \right)}_{R_0(t)} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{OP}_1} + \underbrace{\left(-t^2 + t + \frac{1}{2} \right)}_{R_1(t)} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{OP}_2} + \underbrace{\frac{1}{2} t^2}_{R_2(t)} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{OP}_3}$$

$$\vec{OM}_1(t) = R_0(t) \times \vec{OP}_1 + R_1(t) \times \vec{OP}_2 + R_2(t) \times \vec{OP}_3$$

On développe alors en suivant la ligne x_1 ou y_1 .

$$\begin{cases} x_1 = 0 - 2t^2 + 2t + 1 + 2t^2 \\ y_1 = \frac{1}{2} t^2 - t + \frac{1}{2} - t^2 + t + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} t^2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{\begin{cases} x_1(t) = 2t + 1 \\ y_1(t) = t^2 + 1 \end{cases}}$$

EXERCICE 3 (8 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 2 centimètres. On souhaite construire la courbe B-spline obtenue à partir de quatre points de définition P_1, P_2, P_3, P_4 et de trois polynômes de Riesenfeld du second degré. Les quatre points sont donnés par leurs coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$: $P_1(0, 1)$; $P_2(2, 1)$; $P_3(4, 3)$ et $P_4(6, 1)$.

1° On rappelle que les polynômes de Riesenfeld R_i de degré 2, pour i prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis pour t appartenant à $[0, 1]$ par :

$$R_i(t) = 3 \sum_{j=0}^{j=2-i} (-1)^j \frac{(t+2-i-j)^2}{j!(3-j)!}$$

Montrer que, pour tout t de $[0, 1]$, $R_0(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$. (On pourra utiliser ce résultat dans la suite de l'exercice)

Dans la suite de cet exercice, on admet que, pour tout t de $[0, 1]$:

$$R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad R_2(t) = \frac{1}{2} t^2$$

2° La courbe B-spline Γ cherchée est la réunion de deux arcs de courbe Γ_1 et Γ_2 .

Γ_1 est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que :

$$\vec{OM}_1(t) = R_0(t) \vec{OP}_1 + R_1(t) \vec{OP}_2 + R_2(t) \vec{OP}_3$$

Γ_2 est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\vec{OM}_2(t) = R_0(t) \vec{OP}_2 + R_1(t) \vec{OP}_3 + R_2(t) \vec{OP}_4$$

a) Montrer que l'arc de courbe Γ_1 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t) = 2t + 1 \\ y_1 = g_1(t) = t^2 + 1 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

b) Etudier les variations de f_1 et g_1 sur $[0, 1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

c) On admet que l'arc de courbe Γ_2 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_2 = f_2(t) = 2t + 3 \\ y_2 = g_2(t) = -2t^2 + 2t + 2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

Etudier les variations de f_2 et g_2 sur $[0, 1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

d) Donner des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc de courbe Γ_1 aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$.

BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS		SESSION 2007
CPMAT	DURÉE : 3 h	Coefficient : 2
MATHÉMATIQUES		Page 4/5

b) $f_1(t) = 2t + 1$ $f'_1(t) = 2 > 0$ f_1 est croissante.
 $g_1(t) = t^2 + 1$ $g'_1(t) = 2t > 0$ sur $[0, 1]$ g_1 est croissante.
 Voir tableau de variation.

c) $f_2(t) = 2t + 3$ $f'_2(t) = 2 > 0$ f_2 est croissante.
 $g_2(t) = -2t^2 + 2t + 2$ $g'_2(t) = -4t + 2$
 $g'_2(t) \geq 0 \Leftrightarrow -4t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -4t \geq -2 \Leftrightarrow t \leq \frac{1}{2}$
 g_2 possède un maximum pour $t = \frac{1}{2}$ et $g_2(\frac{1}{2}) = -2 \times \frac{1}{4} + 1 + 2 = \frac{5}{2}$

d) Γ_1 $M_1(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_1(0) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M_1(1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_1(1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) Γ_2 $M_2(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2(0) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $M_2(\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 4 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2(\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $M_2(1) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2(1) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Remarque: $M_1(0)$ et $M_2(\frac{1}{2})$ tangentes horizontales.

f) Voir courbe.

3> a) d'après les résultats du 2> d) et e): $I = M_1(1) = M_2(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b> Les tangentes en I à Γ_1 et Γ_2 sont identiques car $\vec{v}_1(1) = \vec{v}_2(0)$

c> équation de la tangente Γ_I $y = ax + b$ avec $a = 1$
 Avec le point I: $2 = 1 \times 3 + b$ $b = -1$ donc $\Gamma_I: y = x - 1$

Pour $P_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $P_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de P_2 et P_3 vérifient l'équation de la droite Γ_I donc Γ_I est la droite $(P_2 P_3)$

e) Donner des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc de courbe Γ_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{2})$ et $M_2(1)$.

f) On rappelle que, dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique est 2 centimètres.

Construire sur une feuille de papier millimétré, les tangentes à l'arc de courbe Γ_1 aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$ puis l'arc de courbe Γ_1 . Construire, sur la même figure que Γ_1 , les tangentes à l'arc de courbe Γ_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{2})$, $M_2(1)$ puis l'arc de courbe Γ_2 .

Placer les points de définition P_1, P_2, P_3, P_4 sur la figure.

3° a) Donner les coordonnées du point I où se raccordent les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 .

b) Montrer que les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 ont même tangente en I.

c) Montrer que la tangente commune à l'arc Γ_1 et à l'arc Γ_2 au point I est la droite $(P_2 P_3)$.

d) Montrer que le point $M_1(0)$ est le milieu du segment $[P_1 P_2]$ et que le point $M_2(1)$ est le milieu du segment $[P_3 P_4]$.

3> d) $P_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les coordonnées du milieu de $[P_1 P_2]$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c'est le point $M_1(0)$

$P_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $P_4 \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les coordonnées du milieu de $[P_3 P_4]$ sont $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ c'est le point $M_2(1)$.

EXERCICE 2007_CPI_1: (Extrait du sujet CPI – Session 2007)

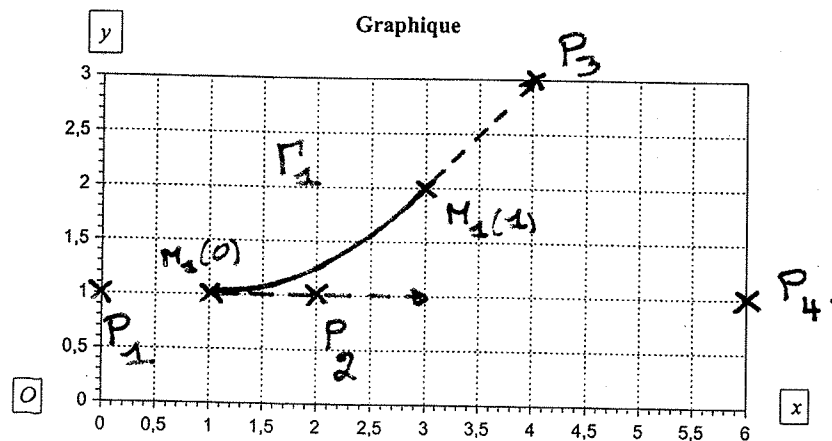
Soit $(x_1; y_1)$ les coordonnées du point $M_1(t)$ de la courbe Γ_1 , courbe définie par le système d'équations paramétriques suivant:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t) = 2t + 1 \\ y_1 = g_1(t) = t^2 + 1 \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0;1]$$

1. Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 et rassembler les résultats dans le tableau ci-dessous.
2. Donner toutes les informations concernant le point initial M_I et final M_F de Γ_1 . Préciser les coordonnées des points de la courbe Γ_1 où les tangentes sont parallèles aux axes du repère.
3. Tracer la courbe paramétrée Γ_1 , les tangentes aux points M_I et M_F ainsi que les tangentes parallèles aux axes du repère.

Tableau de variation pour la courbe Γ_1

Point(s)	M_I	M_F	Variable
t	0	1	
$f_1'(t)$	2	2	Vitesse sur (Ox)
$x_1 = f_1(t)$	1	3	Abscisse (Flèches + valeurs)
$g_1'(t)$	0	2	Vitesse sur (Oy)
$y_1 = g_1(t)$	1	2	Ordonnée (Flèches + valeurs)



EXERCICE 2007_CPI_2: (Extrait du sujet CPI – Session 2007)

Soit $(x_2; y_2)$ les coordonnées du point $M_2(t)$ de la courbe Γ_2 , courbe définie par le système d'équations paramétriques suivant:

$$\begin{cases} x_2 = f_2(t) = 2t + 3 \\ y_2 = g_2(t) = -2t^2 + 2t + 2 \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0;1]$$

1. Étudier les variations des fonctions f_2 et g_2 et rassembler les résultats dans le tableau ci-dessous.
2. Donner toutes les informations concernant le point initial M_I et final M_F de Γ_2 . Préciser les coordonnées des points de la courbe Γ_2 où les tangentes sont parallèles aux axes du repère.
3. Tracer la courbe paramétrée Γ_2 , les tangentes aux points M_I et M_F ainsi que les tangentes parallèles aux axes du repère.

Tableau de variation pour la courbe Γ_2

Point(s)	M_I	M_F	Variable
t	0	1	
$f_2'(t)$	2	2	Vitesse sur (Ox)
$x_2 = f_2(t)$	3	5	Abscisse (Flèches + valeurs)
$g_2'(t)$	2	-2	Vitesse sur (Oy)
$y_2 = g_2(t)$	2	2	Ordonnée (Flèches + valeurs)

$$g_2'(t) = -4t + 2$$

