Sujet d'examen

Thème:

2007_CPI: *(Sujet CPI – Session 2007)*

Table des matières

EXERCICE n°1: (6 points)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2\,y' + (5/4)\,y = 0$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Partie B. Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,e^{-x} \times \sin \frac{1}{2} x$.

1. Développement limité

a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par : $x \rightarrow e^{-x}$.

b) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par : $x \rightarrow \sin \frac{1}{2} x$.

c) Déduire du **a)** et du **b)** que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = x - x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \rightarrow 0.$$

2. Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe représentative $\boldsymbol{C}$ de f au point d'abscisse zéro.

3. Étudier les positions relatives de $\boldsymbol{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse zéro.

EXERCICE n°2: (6 points)

Soit f la fonction définie sur [0 ; 3] par $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sqrt{x}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 4 cm.

Partie A. Étude des variations et courbe représentative

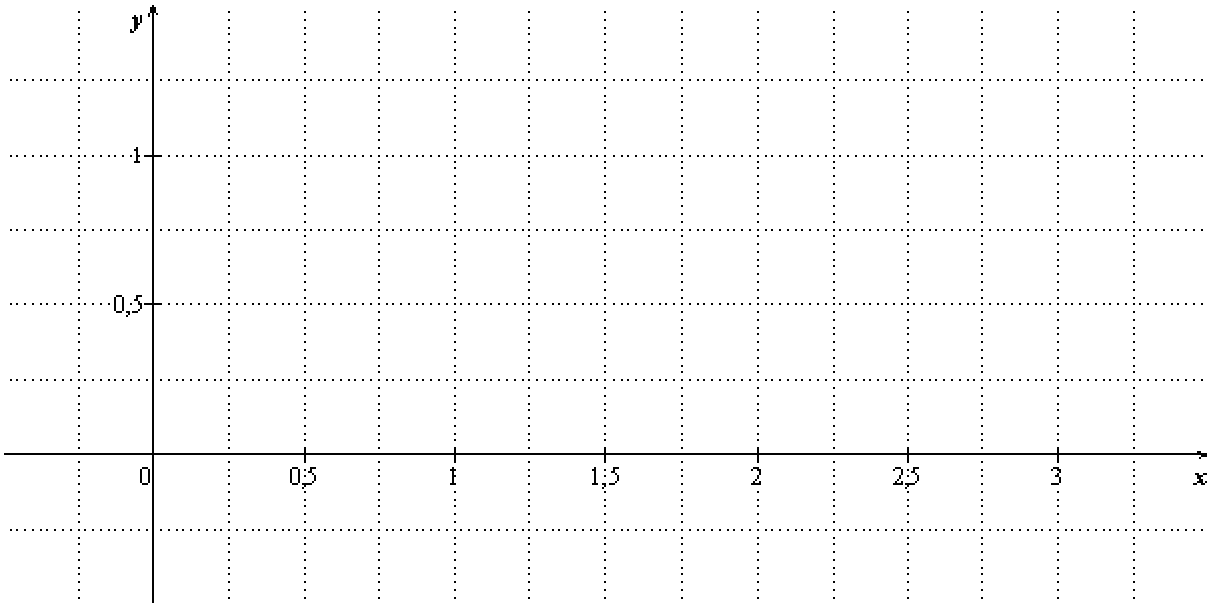
1. Calculer $f(0)$ et $f(3)$. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $f(3)$.

2. Fonction dérivée

a) Démontrer que, pour tout x de] 0 ; 3], $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}(1-x)}{\sqrt{x}}$.

b) En déduire les variations de f sur] 0 ; 3].

c) On admet qu'à l'origine du repère la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ est l'axe des ordonnées.
Construire la courbe $\mathcal{C}$ sur une feuille de papier millimétré.



Partie B. Calcul intégral

On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $\mathcal{C}$ autour de l'axe des abscisses. On désigne par V le volume en unités de volume de ce solide.

On admet que $V = \int_0^3 \pi\,[\,f(x)\,]^2\,\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que $V = \int_0^3 4\,\pi\,x \times \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $V = 4\,\pi\,(\,1 - 4\,\mathrm{e}^{-3}\,)$.

3. Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V.

EXERCICE n°3: (8 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 2 centimètres.

On souhaite construire la courbe B-spline obtenue à partir de quatre points de définition P_1, P_2, P_3, P_4 et de trois polynômes de Riesenfeld du second degré. Les quatre points sont donnés par leurs coordonnées suivantes : P_1 (0 ; 1), P_2 (2 ; 1), P_3 (4 ; 3), et P_1 (6 ; 1).

1. On rappelle que les polynômes de Riesenfeld R_i de degré 2, pour i prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis pour tout t appartenant à [0 ; 1] par :

$$R_i(t)=3\times\sum_{j=0}^{j=2-i}(-1)^j\times\frac{(t+2-i-j)^2}{j!(3-j)!}$$

Montrer que, pour tout t de [0 ; 1], $R_0(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$.
(On pourra utiliser ce résultat dans la suite de l'exercice)

Dans la suite de cet exercice, on admet que, pour tout *t* de [0 ; 1] :

$$R_1(t) = -t^2 + t + \tfrac{1}{2} \text{ et } R_2(t) = \tfrac{1}{2}t^2.$$

2. La courbe B-spline Γ cherchée est la réunion de deux arcs de courbe Γ_1 et Γ_2.

Γ_1 est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_1}(t) = R_0(t) \times \overrightarrow{OP_1} + R_1(t) \times \overrightarrow{OP_2} + R_2(t) \times \overrightarrow{OP_3}.$$

Γ_2 est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2}(t) = R_0(t) \times \overrightarrow{OP_2} + R_1(t) \times \overrightarrow{OP_3} + R_2(t) \times \overrightarrow{OP_4}.$$

a) Montrer que l'arc de courbe Γ_1 est défini par la représentation paramétrique :
$x_1 = f_1(t) = 2t + 1$
$y_1 = g_1(t) = t^2 + 1$ où t appartient à l'intervalle [0 ; 1].

b) Étudier les variations de f_1 et g_1 sur [0 ; 1] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

c) On admet que l'arc de courbe Γ_2 est défini par la représentation paramétrique :
$x_2 = f_2(t) = 2t + 3$
$y_2 = g_2(t) = -2t^2 + 2t + 2$ où t appartient à l'intervalle [0 ; 1].

Étudier les variations de f_2 et g_2 sur [0 ; 1] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

d) Donner des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc de courbe Γ_1 aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$.

e) Donner des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc de courbe Γ_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{2})$ et $M_2(1)$.

f) On rappelle que, dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique est 2 centimètres.
Construire sur une feuille de papier millimétré, les tangentes à l'arc de courbe Γ_1 aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$ puis l'arc de courbe Γ_1. Construire, sur la même figure que Γ_1, les tangentes à l'arc de courbe Γ_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{2})$ et $M_2(1)$ puis l'arc de courbe Γ_2.
Placer les points de définition P_1, P_2, P_3, P_4 sur la figure.

3. Point particulier

a) Donner les coordonnées du point I où se raccordent les arcs de courbe Γ_1 et Γ_2.

b) Montrer que les arcs de courbe Γ_1 et Γ_2 ont même tangente en I.

c) Montrer que la tangente commune à l'arc Γ_1 et à l'arc Γ_2 au point I est la droite (P_2P_3).

d) Montrer que le point $M_1(0)$ est le milieu du segment $[P_1P_2]$ et que le point $M_2(1)$ est le milieu du segment $[P_3P_4]$.