BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

"CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS"

SESSION 2007

***

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.

Deux feuilles de papier millimétré sont fournies.

Le sujet comprend 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

EXERCICE 1 (6 points)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + \frac{5}{4}y = 0$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur **R**, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions sur **R** de l'équation différentielle (E).

2° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x} \sin \frac{1}{2}x$.

1° a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

b) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{2}x$.

c) Déduire du 1° et du 2° que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :
$f(x) = x - x^2 + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2° Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe représentative C de f au point d'abscisse zéro.

3° Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse zéro.

EXERCICE 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur [0, 3] par $f(x) = 2\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\sqrt{x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$, d'unité graphique 4 cm.

A. Étude des variations et courbe représentative

1° Calculer $f(0)$ et $f(3)$. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $f(3)$.

2° a) Démontrer que, pour tout x de]0, 3], $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}(1-x)}{\sqrt{x}}$.

b) En déduire les variations de f sur]0, 3].

3° On admet qu'à l'origine du repère la tangente à la courbe C est l'axe des ordonnées.
Construire la courbe C sur une feuille de papier millimétré.

B. Calcul intégral

On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe C autour de l'axe des abscisses.
On désigne par V le volume en unités de volume de ce solide.
On admet que $V = \int_0^3 \pi [f(x)]^2\ \mathrm{d}x$.

1° Vérifier que $V = \int_0^3 4\pi\, x\, \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$.

2° A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :
$V = 4\pi\,(1 - 4\,\mathrm{e}^{-3})$.

3° Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V

EXERCICE 3 (8 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ où l'unité graphique est 2 centimètres. On souhaite construire la courbe B-spline obtenue à partir de quatre points de définition P_1, P_2, P_3, P_4 et de trois polynômes de Riesenfeld du second degré. Les quatre points sont donnés par leurs coordonnées dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$: $P_1(0, 1)$; $P_2(2, 1)$; $P_3(4, 3)$ et $P_4(6, 1)$.

1° On rappelle que les polynômes de Riesenfeld R_i de degré 2, pour i prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis pour t appartenant à [0, 1] par :

$$R_i(t) = 3 \sum_{j=0}^{j=2-i} (-1)^j \frac{(t+2-i-j)^2}{j!(3-j)!}.$$

Montrer que, pour tout t de [0, 1], $R_0(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$. **(On pourra utiliser ce résultat dans la suite de l'exercice)**

Dans la suite de cet exercice, on admet que, pour tout t de [0, 1] :

$$R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad R_2(t) = \frac{1}{2}t^2.$$

2° La courbe B-spline Γ cherchée est la réunion de deux arcs de courbe Γ_1 et Γ_2.
Γ_1 est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_1(t)} = R_0(t)\ \overrightarrow{OP_1} + R_1(t)\ \overrightarrow{OP_2} + R_2(t)\ \overrightarrow{OP_3}.$$

Γ_2 est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2(t)} = R_0(t)\ \overrightarrow{OP_2} + R_1(t)\ \overrightarrow{OP_3} + R_2(t)\ \overrightarrow{OP_4}.$$

a) Montrer que l'arc de courbe Γ_1 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t) = 2t + 1 \\ y_1 = g_1(t) = t^2 + 1 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

b) Etudier les variations de f_1 et g_1 sur [0, 1] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

c) On admet que l'arc de courbe Γ_2 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_2 = f_2(t) = 2t + 3 \\ y_2 = g_2(t) = -2t^2 + 2t + 2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

Etudier les variations de f_2 et g_2 sur [0, 1] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

d) Donner des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc de courbe Γ_1 aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$.

e) Donner des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc de courbe Γ_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{2})$ et $M_2(1)$.

f) On rappelle que, dans le repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$, l'unité graphique est 2 centimètres.
Construire sur une feuille de papier millimétré, les tangentes à l'arc de courbe Γ_1 aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$ puis l'arc de courbe Γ_1. Construire, sur la même figure que Γ_1, les tangentes à l'arc de courbe Γ_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{2})$, $M_2(1)$ puis l'arc de courbe Γ_2.
Placer les points de définition P_1, P_2, P_3, P_4 sur la figure.

3° a) Donner les coordonnées du point I où se raccordent les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2.

b) Montrer que les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 ont même tangente en I.

c) Montrer que la tangente commune à l'arc Γ_1 et à l'arc Γ_2 au point I est la droite (P_2P_3).

d) Montrer que le point $M_1(0)$ est le milieu du segment $[P_1P_2]$ et que le point $M_2(1)$ est le milieu du segment $[P_3P_4]$.

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES
BTS CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$e^{at} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{Arc}\sin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\text{Arc}\tan t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$		
$\sin t$	$\cos t$	$e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$	$a e^{at}$
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(k u)' = k u'$

$(uv)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u) u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k e^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ …….. où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt}$ ……… où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines
de discriminant Δ	complexes conjuguées de l'équation caractéristique.