Sujet d'examen

Thème:

2005_CPI: *(Sujet CPI – Session 2005)*

Table des matières

EXERCICE n°1: (9 points)

Les trois parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle (E_1) : $y' + y = -\,\mathrm{e}^{-x}$,

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.

2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\,x\,\mathrm{e}^{-x}$, est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

4. Déterminer la solution particulière f_1 de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie la condition initiale $f_1'(0) = 0$.

Partie B. Étude d'une fonction et calcul intégral.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\,x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. On note $I = \int_0^{0,1} g(x)\,\mathrm{d}x$.
Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = 1{,}1\,\mathrm{e}^{-0,1} - 1$.

2. Développement limité.

a) À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \to \mathrm{e}^{t}$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction $x \to \mathrm{e}^{-x}$.

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction g est :

$$g(x) = -x + x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 + x^3\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim \varepsilon(x) = 0 \text{ pour } x \to 0.$$

3. On note $J = \int_0^{0,1} \left(-x + x^2 - \tfrac{1}{2}x^3\right)\mathrm{d}x$.
Démontrer que $J = -\,0{,}1123 / 24$.

4. On considère l'affirmation suivante: le nombre $I - J$ est inférieur à 10^{-6}.
Cette affirmation est-elle vraie ?

Partie C. Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle (E_2) : $y'' - y = 2\,\mathrm{e}^{-x}$,

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 0$.

2. On admet que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\,x\,\mathrm{e}^{-x}$, est une solution particulière de l'équation différentielle (E_2).
En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_2).

3. Déterminer la solution particulière f_2 de l'équation différentielle (E_2) qui vérifie les conditions initiales $f_2(0) = 0$ et $f_2'(0) = 0$.

EXERCICE n°2: (7 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans le cadre d'accord sur la formation professionnelle, une grande entreprise a proposé à ses personnels un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel de conception industrielle.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

Partie A. Lois de probabilités.

On note E l'évènement : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage ». On suppose que $P(E) = 0{,}3$.

On tire au hasard le nom de n personnes de cette entreprise. On suppose l'effectif suffisamment important pour pouvoir assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

1. Dans cette question on prend $n = 15$.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 15 noms, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b) Déterminer la probabilité qu'une personne au plus parmi les 15 dont le nom a été tiré au hasard ait suivi le stage.

2. Dans cette question on prend $n = 150$.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 150 noms, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0{,}3$.

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 45 et d'écart-type 5,6. On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 45 et d'écart-type 5,6.

a) Justifier les paramètres de cette loi normale.

b) Calculer la probabilité qu'au plus 40 personnes, parmi les 150 dont le nom a été tiré au hasard, aient suivi le stage, c'est à dire calculer $P\,(\,Z \leqslant 40{,}5\,)$.

Partie B. Probabilités conditionnelles.

Dans cette entreprise quarante cinq pour cent (45%) du personnel a un niveau de qualification supérieur ou égal à « bac + 2 ».

L'évènement A : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a un niveau supérieur ou égale à bac + 2 » a donc pour probabilité $P(A) = 0{,}45$.

On rappelle que l'événement E : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage » a pour probabilité $P(E) = 0{,}3$.

Enfin, 35% des personnes dont le niveau de qualification est supérieur ou égal à « bac + 2 » ont suivi le stage. Ce qui permet d'en déduire la probabilité conditionnelle :
$P_A(E) = 0{,}35$, ou $P(E/A) = 0{,}35$.

1. Calculer la probabilité de l'évènement : « une personne de l'entreprise dont le nom a été tiré au hasard a suivi le stage **et** a un niveau de qualification supérieur ou égale à bac + 2 ».

2. Calculer la probabilité de l'évènement : « une personne dont le nom a été tiré au hasard parmi les noms des personnes ayant suivi le stage a un niveau supérieur ou égal à bac + 2 ».

EXERCICE n°3: (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

A tout nombre réel t de l'intervalle [0 ; 2], on associe le point $M(t)$ de coordonnées :
$x = f(t) = t^3 - 3t^2 + 3t$ et $y = g(t) = [\ln(1 + t)]^2$.

On note $\boldsymbol{C}$ la courbe ensemble des points $M(t)$ obtenus lorsque t varie dans [0 ; 2].

1. Étudier les variations des fonctions f et g sur [0 ; 2] et regrouper les résultats dans un même tableau.

2. Donner un vecteur directeur pour chacune des tangentes à la courbe $\boldsymbol{C}$ aux points $M(0)$, $M(1)$ et $M(2)$, obtenus pour $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$.

3. Tracer les tangentes définies à la question **2.** et la courbe $\boldsymbol{C}$.

<u>*Aide(s):*</u> *Tableau de variation unique*

Points	$M(0)$ $M(2)$
t	0 2
$f_2'(t)$	
$f_2(t)$	
$g_2'(t)$	
$g_2(t)$	

<u>*Aide(s):*</u> *Représentation graphique*